205 K

205 K

1393 d 23

PRAELECTIONES TRESDECIM IN PRINCIPIVM ELEMENTORVM EVCLIDIS,

OXONII HABITÆ.

M. DC. XX.

Wh. Kennett

AC: OX

OXONII,
Excudebant IOHANNES LICHFIELD, & IACOBVS SHORT. 1621.

Errata sic corrige.

Pag. 12. lin. 19. lege finis est, vt puto. 36. 19. præsertim. 64. 8. definitioni. 69. 14. duodecimam. 75. 23. ἰαυταῖς σημεῖ. 98. 9. ἰυθεῖα. 109. 22. qui apud. 134. 3. in directum. 147. 20. P N Q. 156. 20. ἀπαγωγῆς. 170. 9. procedit. 173. 19. separarentur. 184. 10. lateri αχ. 191. 12. repetitur. 202. 24. ἐφαρμογῆς. 205. 2. pro D E, D F lege D F D E. 237. 16. tricesimam noni. 239. 20. majore αβ minori. 248. 17. φπ.

HENRICVS SAVILIVS LECTORI.

NOli, Lector erudite, quicquam hic expectare in arte reconditum aut ſingulare. Elementa, ſeu verius elementorum elementa tironibus traduntur: quæ neque verborum ornatum admittunt, neque ſenſuum ſubtilitatem. Iſtas tamen qualeſcunque primitias, intempeſtive fortaſſe, & non pro decoro ætatis meæ, dignitatem nihil moror, propriæ fundationi viſum eſt conſecrare. Tu lector, ſeni, ἐὰν τύχῃ, ἀμνημονοῦντι da veniam, & vale.

PRÆLECTIONES IN PRINCIPIVM ELEMENTORVM EVCLIDIS.

LECT. I.

CONsilium meum est, Auditores, si vires & valetudo suffecerint, explicare definitiones, petitiones & communes sententias, & octo priores propositiones primi libri Elementorum, cætera post me venientibus relinquere. Nolite verò expectare comptulam Orationem; nolite panegyricos vel in artem, vel in Auctorem: de vtroq; tamen breviter; & priùs de Auctore. Vbi primo loco minuendus est eorum error, qui putant hunc nostrum *Euclidem*

dem Mathematicum eundem esse cum *Euclide* Socratico, cujus præcipua sunt partes in *Theæteto Platonis*, crebraq; in alijs ejusdem dialogis mentio : cujus etiam vitam describit *Laertius* libro secundo, & *Suidas* eisdem propè verbis in vocabulo Εὐκλείδης. *Laertius* sic ; *Euclides Megaris* natus, oppido quod *Isthmo* adjacet, *Parmenidis* librorum inprimis studiosus, & *Socratis* auditor : ad quem ait *Hermodorus* concessisse *Platonem*, reliquosq; philosophos post mortem *Socratis*, crudelitatem tyrannorum metuentes : cujus secessionis meminit etiam *Chrysostomus*, oratione quarta de laudibus *Pauli*. Hic Eristicæ, hoc est, contentiosæ philosophiæ (in qua successores habuit *Eubulidem*, *Alexinum* & alios) fuit princeps, dialogosque reliquit sex, *Lampriam*, *Æschinem*, *Phœnicem*, *Critonem*, *Alcibiadem*, & ἐρωτικὸν, sive *Amatorium* ; Mathematicum, vt videtis, ne γρῦ quidem. Ad hunc eundem Socraticũ pertinent illa Tauri philosophi apud Gellium libro sexto Noctium Atticarum, capite decimo : Decreto, inquit, suo Athenienses caverant, vt qui Megaris ciuis esset, si intulisse Athenas pedem prehensus

henſus eſſet, ea res ei homini capitale eſſet. Tanto *Athenienſes* (inquit) odio flagrabant finitimorum hominum *Megarenſium*. Tum *Euclides*, qui indidem *Megaris* erat, qui ante id decretum & eſſe Athenis, & audire *Socratem* conſueverat, poſtquam id decretum ſanxerunt, ſub noctem cùm adueſperaſceret, tunica longa muliebri indutus, & pallio verſicolore amictus, & caput *rica* velatus, è domo ſua *Megaris Athenas* ad *Socratem* commeabat, vt vel noctis aliquo tempore conſiliorum ſermonumque eius fieret particeps; rurſuſque ſub lucem millia paſſuum paulo amplius viginti eadem illa veſte tectus redibat. Huius decreti meminiſſe mihi videtur *Thucydides* libro Hiſtoriarum primo, quo interdictum erat *Megarenſibus* μὴ χρῆσθαι τοῖς λιμέσι τοῖς ὑπὸ τὴν Ἀθηναίων ἀρχὴν, μηδὲ τῇ ἀτθικῇ ἀγορᾷ. Id eſt, vt ne portubus vterentur ſub Athenienſium imperio, neq; foro Attico. Quod decretum cùm Lacedæmonij aboleri poſtulâſſent, nec impetrâſſent, exarſit illicò bellum Peloponneſiacũ, omnium, quæ vnquam inter ſe Græci geſſerunt, graviſſimum & maximè diuturnum. Iam ab initio belli

Rica Nonnio *et* Feſto *ſudarium*; Varroni, *genus veli, quo mulieres capita tegunt; ad hunc locum aptius.*

belli Peloponnesiaci ad mortem Alexandri, vt ex continenti historia Diodori Siculi patet, anni sunt centum & octo; & à morte Alexandri ad initium regni Ptolemæi in Aegypto (cum quo familiariter vixit *Euclides* Mathematicus, vt ex *Proclo* ostendetur) anni novemdecim, vti constat ex canone Regnorum Ptolemæi; vt necesse sit Euclidem Socraticum, si idem est cum Euclide Mathematico, postquam vna nocte tam longam potuit ire, redire viam annos minimùm centum viginti septem illi ambulationi superfuisse; quem tamen inter *Luciani* μακροβίους, longævos, numeratum non video. Vel vt aliam sumamus epocham omni exceptione majorem: ab anno, quo *Socrates* damnatus, cicutam bibit, vsq; ad mortem *Alexandri* anni sunt septuaginta sex; inde ad initium Regni *Ptolemæorum* in Aegypto anni novemdecim: summa 95, minus quidem impossibilis, quàm superior, vtraq; tamen perabsurda. Sequitur vt locum Valerij Maximi à Criticis nostris fœdè depravatum examinemus: qui, vt verisimile est, communione nominis deceptus, vtrumq; Euclidem confundere videtur

videtur. Verba sunt lib. 8. cap. 13. *Plato* conductores sacræ Aræ (Arcis legunt contra omnes libros nostri παραδιορθῶται, Critici, qui quòd non intelligũt, strenuè corrũpunt, *Piggius* nescio quis ex schola Lipsiaca) Plato igitur conductores sacræ aræ, de modo & forma eius secum conferre conatos, ad *Euclidem* Geometram ire iussit, scientiæ eius cedens, imò professioni. Horum priùs, conductores aræ ad *Platonem* venisse, verum est; ab eo reiectos ad *Euclidem* Mathematicum, non adducar, vt credã. Integra historia, non vt apud Valeriũ truncata, extat apud Philoponũ in cõmentario in sept. c. prim. Posteriorũ, ad illa verba Aristotelis, ἀλλ' ὑδὶ μὲν δύο κύβοι, κύβος, Delijs, inquit, peste laborantibus, consultus Apollo respondit, Liberatum iri peste, si aram suam, quæ cubicæ erat figuræ, duplicâssent: conductores, priorj aræ cubũ alterum æqualem superposuerunt; atq; ita cubi formâ immutata, facta est ara non cubica, sed δοκὸς, quadrilatera columna. Peste itaq; non cessante, iterum consulentibus respondit Apollo, non esse oraculo satisfactũ: se enim imperâsse, vt cubum duplicarent, hoc est, vt aram construerent cubicam, ara

priore duplo maiorem : atqui illi cubum cubo ſuperimpoſuerunt. Venerunt itaq; ad Platonem, vt rationem & methodum invenirent cubi duplicandi, manente ſcilicet forma cubica. Plato reſpondit, neglectæ Geometriæ Græcos à Deo accuſari : neq; id aliter fieri poſſe, quàm ſi inter duas rectas lineas in dupla proportione duæ mediæ proportionales invenirentur. Quod problema diſcipulis ſuis Plato propoſuit, qui, vt ait idem *Philoponus*, de hoc argumento variè ſcripſerunt, etſi nihil, ait, iam extet. Ne ipſe quidem *Euclides* (hunc enim Geometræ nomine deſignare minimè dubium eſt) de hac re quicquam ſcripſit. Ex hac narratione doctiſſimi Interpretis, & de * Ara, non arce quæſtionem eſſe propoſitam liquet, nec ad *Euclidem*, vt vult *Valerius*, ſed ad diſcipulos ſuos rem à *Platone* reiectam. Quî enim veriſimile de *Euclide*, qui non niſi annis demùm poſt Platonis obitum vno & quadraginta, ſub Ptolemæis in Aegypto potuit docere? Neq; verò ad diſcipulos ſolùm rem reiecit, ſed ipſe Plato in eodem argumento elaborauit, extatq; ipſius elegantiſſimum Meſolabium

* *Sic etiam Plutarchus* ἐν Δέλφοις *in libello de Ei apud Delphos; vbi hæc eadem hiſtoria breuiter tangitur.*

um apud Eutocium in commentarijs ſuper ſecundum Archimedis de Iphæra & cylindro, & Archytæ aliud, Philopono, quod miror, non viſa. In hanc ſententiam de duplici Euclide, diſputatum eſt à me ante annos quinquaginta & quod excurrit, cùm in ſcholis publicis pro meo modulo interpretarer in ordinarijs lectionibus Almageſtum Ptolemæj. In quam etiam opinionem biennio poſtea Federicum Commandinum Italum, ijſdem, vti credere par eſt, permotum argumentis, video incidiſſe. His extra rem, ſed ad euellendum veterem errorem de *Euclide* Socratico dictis, ad noſtrum Mathematicũ redeamus: Quem *Proclus* nõ *Socrate* ſolùm & *Platone*, ſed *Eudoxo* Platonis, & *Menæchmo* Eudoxi diſcipulo, reliquiſq; omnibus *Platonis* diſcipulis iuniorem facit; *Eratoſthene* ſolùm & *Archimede* maiorem natu. Cuius quidem ingenij monumenta habemus plurima, vitæ perpauca; adeò vt ne quidem, vnde oriundus fuerit, pro certo ſciatur. Nam Megarenſem fuiſſe, quia Socraticus ille fuerat Megarenſis, non magis concludi poteſt, quàm Athenienſem, quia

duos habuerit cognomines Archontas Athenis, anno 2. Olympiadis 88. & anno secũdo Olympiadis nonagesimæ quartæ, qui magistratus apud Athenienses supremus est, & ἐπώνυμος. ex quibus Fasti numerantur, vt apud Romanos ex consulibus. Quod si non Athenis, ex media certè Græcia natum existimo, qui tam pressè, tam accurato verborum delectu scripserit, vt ab eius formulis & phrasibus nemo posterorum, & in Mathematicis excellentium virorum, vnquã vel latum vnguem discessisse videatur. Quod constat, Alexandriæ primus omnium, vt in vrbe recèns condita, scholam Mathematicam sub Ptolemæo Lagi aperuit, tanto successu & tam fœlicibus auspicijs, vt ab eo tempore vsq; ad Saracenica tempora, nemo ferè extiterit insignis Mathematicus, qui non Alexandriæ, vel ortus fuerit, vel plures annos studuerit. Itaq; Euclidi & discipulis suis, quos eum in magno numero reliquisse scribit Pappus in septimo collectionum Mathematicarum, debemus Eratosthenes, Archimedes, Apollonios, Ptolemæos, Theones, Philoponos cum tota Græcorum Aristotelis

ſtotelis interpretum cohorte, cæteros omnes, qui in Mathematicis familiam duxerunt. Et cum prædicto quidem Ptolemæo rege vixit Euclides, vt dixi, familiariter: à quo aliquãdo interrogatus, An via eſſet aliqua ad Geometriam magis compendiaria ſua στοιχειώσει, reſpondiſſe fertur, auctore Proclo μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν, hoc eſt, nullam eſſe viam aut ſemitam Regiam ad Geometriam. Moribus fuit Euclides, auctore Pappo in ſeptimo, mitiſſimis, benignus erga omnes, præſertim eos, qui Mathematicas diſciplinas aliqua ex parte augere & amplificare ſtuderent; non contentioſus, φιλονεικότατος, (tantum abeſt, vt Eriſticæ, hoc eſt, contentioſæ philoſophiæ principem fuiſſe veriſimile ſit) ſed ἐπιεικὴς, accuratus, non arrogans, vt Apollonius, cuius mores paſſim inſectatur Pappus. Iam de operibus, inter quæ facilè palmam obtinent libri tredecim Elementorum, magno reipub. literariæ bono, ad noſtra vſq; tempora conſeruati. In quibus, inquit *Proclus* in 2. multa quidem ordinavit *Eudoxj*, multa *Theætetj* perfecit, ea præterea, quæ laxiùs à prioribus demonſtra-

tá fuerant, firmiſſimis demonſtrationibus vinxit, quæ nec coargui, nec convinci poſſent. Atq; hæc Proclus de Euclidis Elemẽtis, qui duobus quaſi ſeculis poſterior fuit Theone. Cujus, Theonis dico, quæ fuerint partes in hoc Elemẽtorum volumine, video inter recentiores variè diſputari. Quidam propoſitiones Elementorum tribuunt Euclidi, demonſtrationes Theoni, homines ſtulti & perridiculi; quaſi vllus vnquam artifex ſuas ędi voluerit concluſiones, nullis adjectis probationibus. Hoc neq; philoſophorum quiſquam, nec medicorum, nedũ Mathematicorum, fecit vnquam. Secunda eſt opinio Petri Rami, qui tam propoſitiones, quàm demonſtrationes Euclidi abjudicat, vniverſa Theoni attribuens, falsè: quis negat? Cùm hæc eadem, quæ nunc habemus, eodem ordine, eiſdem verbis, agnoſcãt, ſub Euclidis nomine Proclus & Boetius Theone poſteriores, & anterior Theone Alexander Aphrodiſeus, & omnis antiquitas. Tertia Buteonis, qui omnia, quæ nunc in manibus ſtudioſorũ, attribuit Euclidi. Quæ opinio aut vera eſt, aut veritati certè proxima.

ma. Quid ergo dicemus vulgatis libris, qui ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν, ex Theonis colloquijs, ſive congreſſibus præ ſe ferunt? Cujus tamen tituli in neutro noſtrorum codicum manu-ſcriptorum vllum reperi veſtigium. Non diffiteor in vno ad oram marginis adſcripta eſſe ad decimum tertium librum hæc verba: Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναθροίσας, ἢ ὅτι ἐπὶ χρόνοις Ἀλεξάνδρου τοῦ Μακεδόνος· Θέων δὲ ὁ σωτάξας αὐτά, ὅτι ἐπὶ Θεοδοσίου τοῦ βασιλέως; vt collectionem Elementorum Euclidi, ordinationem & diſpoſitionem Theoni tribuiſſe videatur. Magna certè Theonis laus, ſi inordinata & incompoſita in ordinem redegit. Sed ne huic incerto Scholiaſtæ fidem adjungamus, obſtat, vt dixi, Procli & antiquorum omnium auctoritas, obſtat mirabilis & concinna propoſitionum ſeries, ex quibus vnam loco ſuo ſi eximas, tota corruat compages & ſtructura neceſſe eſt. Quid igitur? Nullæ ſunt Theonis in hoc libro partes? Non me movet neq; συνουσιῶν titulus in vulgatis, neq; ſcholium illud manu-ſcriptũ incerti auctoris in meo codice: ſed auctoritatem ipſius Theonis, quæ extat pag. 50. cõmen-

mentariorum in Almageſtum perpendendam exiſtimo, quæ fortaſſe viam præire poſſunt ad eruendam in hac quæſtione veritatem. Quòd verò ſectores, inquit, in circulis æqualibus ſunt proportionales angulis ad centrum conſtitutis, oſtenſum eſt à nobis in editione Elementorum, ἐκδόσει, ad finem ſexti libri. Ex quibus verbis & novam Elementorũ Euclidis editionem adornâſſe Theonẽ conſtat, & nonnulla ab ipſo adjecta. Et quidem in omnibus noſtris exemplaribus, tam vulgatis, quàm manuſcriptis hæc verba de ſectore annectuntur vltimæ propoſitioni libri ſexti Elementorum, quæ & Theonis eſſe puto, vt etiam demonſtrationem ad illa verba: Λέγω ὅτι καὶ, &c. vſq; ad finem. Nam Euclidis, illa ſolennis clauſula, ὅπερ ἔδει δεῖξαι, quæ proximè præcedit, finem puto Euclideæ demonſtrationis, reliqua quæ ſequuntur aſſumentũ Theonis. Idem iudiciũ ferendũ exiſtimo de multis in decimo libro lemmatijs, & fortaſſe propoſitionibus nonnullis. Alexander certe aliquot ante Theonẽ ſeculis, eam, quæ quinta eſt decimi in noſtris libris, citat pro quarta pag. 87. cõmenta-

tariorū in priora Aristotelis; vt necesse sit aliquam ex præcedentibus, quartam, vti reor, qua sine magno incōmodo sanè carere potuissemus, suo tempore ab Elementorum libro abfuisse, vel saltem cum tertia coaluisse. Et quidem vltimam decimi nō dubito assumentum esse vel Theonis, vel alterius potiùs nescio cujus antiquioris (nam apud Alexandrum extat ijsdem propè verbis) sed non ita perspicaci ingenio, vtpote alieno loco positam, nullam cum præcedentibus continuationem habentem, vt est à doctissimo Petro Montaureo rectissimè animaduersum. Ex quibus omnibus sic concludo, mihi videri Theonis fuisse partes, in Euclide pauciss. quidem in locis interpolando, explicā. do, augendo; vltra hoc nullas. (Qui tamen labos non tanti fuit, ut Proclo, omniū ante se Mathematicorum diligentissimo laudatori, commemoratione dignus videretur) quamvis fuerit ille Mathematicis artibus instructissimus, vt ex commentarijs in Almagestū apparet, & filiæ in Philosophia & Astronomia admirandi ingenij & doctrinæ pater: cujus Historiam, etsi extra rem, non erit fortasse

taſſe vobis ingratum audire ex libri ſeptimi capite quinto decimo Hiſtoriæ Eccleſiaſticæ Socratis, cujus verba ſunt : Erat mulier quædã Alexandrina, nomine Hypatia, Theonis philoſophi filia, quæ eruditione & doctrina omnes ſuperauit ſui temporis philoſophos, ſucceſſitq; Plotino in ſchola & philoſophia Platonica docenda, reliquaq; philoſophia & Mathematica auditoribus exponẽda. Quamobrẽ omnes, qui philoſophiam addiſcere cupiebant, ad eam vndiq; confluxerunt. Neq; cum auditoribus ſolùm, ſed etiam cum ſummis magiſtratibus liberè & modeſtè verſata eſt, neq; erubuit inter viros fœmina conſpici. Tanta erat & tam reuerenda apud omnes de eius ſobrietate & doctrina concepta opinio. In eam itaq; tunc inuidiæ flamma exarſit. Quia enim ſæpius cum Oreſte præfecto Auguſtali, qui auctoritate proconſulari Aegypto præſidebat, & ſimultates cum Cyrillo iuſtiſſimis de cauſis exercebat, ſermones conferebat; hoc apud Eccleſiæ populum ipſi fraudi fuit, quaſi ipſa impedimento eſſet, quò minùs Oreſti cum

cum Episcopo Cyrillo conueniret. Itaque coniuratione inita, homines quidam feruido magis, quàm bono ingenio, duce Petro quodam Anagnosta, mulierem domum alicunde redeuntem obseruant, eamq; de ęcella dejiciunt, & ad Ecclesiam nomine Cæsaream trahunt: vbi exutam vestibus testis interficiunt, membratimq; discerptam conijciunt in * Cinaronem, membraq; congesta igne absumunt. Hoc factum non paruam conflauit Cyrillo inuidiam, & toti apud Alexandrinos Ecclesiæ: alienissimæ quippe à Christiana professione pugnæ & cædes & huiusmodi violentiæ. Hæc facta sunt Consule Honorio decimùm, & Theodosio sextùm, mense Martio, tempore quadragesimali: qui fuit * octauus annus Theodosij iunioris, & Honorij ptimus & vicesimus. Hæc Socrates. Hesychius Illustrius in libello de viris insignibus, qui sapientiæ laude claruerunt, discerptam scribit ab Alexãdrinis, corpusque citus per totam ciuitatem illusum propter excellentẽ eruditionẽ, maximè circa Astronomiam, paternam hæreditatem. Hic est ille magnus, &, si Dijs placet, Sanctus

* *Locus est fortasse Gomonijs apud Romanos non absimilis.*

* *Annus Domini 415.*

Cyrillus, Episcopus Alexandrinus, magis bonus Theologus, quàm vir bonus, Iohannis Chrysostomi viri innocentissimi disertissimiq; in vita & post mortem hostis infensissimus, vt Theophili fororis filium possis agnoscere. Qui etiam (Cyrillus) paucis ante mortem Hypatiæ diebus sicarium quendã Monachum (qui non sine conscientia Cyrilli manus sanguine Orestis, supremi, vt dixi, Magistratus AEgypti commaculâsset) quæstioni subjectum, eiq; immortuum, retulit in numerum sanctorum Martyrum: vt non novum sit, aut nostra demum ætate auditũ, Monachos fieri Regicidas, aut Regicidas Monachos à factiosis Episcopis canonizari pro sanctis. Ad hanc Hypatiam extant Synesij Episcopi Cyrenes epistolæ septem, scilicet, 10, 15, 16, 33, 80, 124, 153, cum hac inscriptione, Ὑπατίᾳ τῇ φιλοσόφῳ vel simpliciter τῇ φιλοσόφῳ, philosophiæ κατ' ἐξοχὴν magistræ: philosophiamq; Athenis commigrâsse in AEgyptum, ibiq; ab Hypatia sapientiæ facta femina testatur in Epistola 135. idem Synesius. Sed tempus est ad Euclidẽ redire. Cujus præter Elementa, alia complura

plura habemus monumenta à Proclo commemorata, Optica, Catoptrica, libros, vt ego quidem existimo, non magni momenti, & Harmonica, de quibus nullum mihi arrogo iudicium. Data etiam Euclidis esse docuit Pappus in 7°. & Phænomena Philoponus ad secundum Physicorum, & Pappus, nisi fallor, alicubi in sexto. Atq; hæc sunt Euclidis opera, quæ ad nostram ætatem peruenerunt omnia, præter Fragmentum, fortasse spurium, de Leui & Ponderoso, quod Latinè in libris circumferri memini. Præter hæc commemorat Pappus, locorum ad superficiem libros duos, & Proclus librum Diuisionum; quem Deeus noster putat esse librum, qui passim legitur nomine Machometi Bagdedini de superficierum diuisionibus. Quæ opinio quàm conueniat verbis Procli lib. 2°. pag. 40°. nescio. Circulus, inquit ille, & rectilineorum quodlibet, in figuras ratione dissimiles dividi potest: quod & ipse Euclides, inquit, in diuisionibus pertractat, alias quidem figuras in similes datas figuras, alias verò in dissimiles dividens. Atqui nulla est in illo Bagdedini li-

bello propoſitio, quæ figuras doceat in ſimiles, vel diſſimiles figuras dividere, ſed in datam proportionem dividere. Pſeudariorũ quoq; ſiue fallaciarum librum cõmemorat Proclus: quem librum propter multa vtile eſſet extare. Methodum enim tradit explorandi & detegendi paralogiſmos & pſeudographias in Geometria. In qua, vt veritates ſunt longè certiſſimæ, ſic pſeudographias habet periculoſiſſimas. De quo libro ſic Proclus in 2°. Quoniam multa mente concipimus vt veritati adhærentia, & ſcientificis principijs conſentanea, quæ & à principijs aberrant, & ſimpliciores decipiunt, methodos tradidit *Euclides* in hoc pſeudariorum libro, altera ab alteris prudenter diſcernendi, per quas tirones huius diſciplinæ fierent exercitatiores ad deprehendendos paralogiſmos, & à fallacijs & captionibus cautiores. Pappus in ſeptimo libro, & Proclus ad primam & decimam-quintam huius, Euclidi adſcribunt tres libros Poriſmatum, hoc eſt, Problematum, quæ non generationem aut ποίησιν (factionem) alicuius rei requirunt, ſed inventionem tantùm, vt

 dati

dati circuli centrum invenire, aut duabus datis cõmensurabilibus quantitatibus communẽ mensurã invenire, & quæ his similia, aliâ planè ac diversa notione verbi porismatis, quàm in Elementis; vbi porismata ea appellantur, quæ sunt quasi lucra quædã & corollaria ex demonstratione alicuius propositionis provenientia, nulla indigentia nova probatione. Nam quatuor libros Conicorum ab Euclide relictos, & ab Apollonio, cùm Euclidis discipulos Alexandriæ multos annos audîsset, surreptos, & ab eodem editos pro suis, adiectis ex se alijs quatuor, tradit in septimo Pappus, neque debitam ab illo relatam gratiam primo, vt decuit, inventori. Hactenus de Auctore, sequitur de Arte.

LEC-

LECTVRA. II.

GEometria pars est Mathematicæ scientiæ, imò basis & fundamentum, atq;, vt Philo scitè loquitur, Metropolis omnium artium Mathematicarum. Nam ex ea, tanquam matrice civitate, derivatæ sunt illæ nobilissimæ coloniæ, Optica, Astronomia, cæteræ; ipsaq; adeò Arithmetica, cujus subjectum est simplicissimum, & Geometrico simplicius, remotiusq; à materia, vtpote carens situ, Geometriæ adminiculo stat, eâq; nititur, (quod admirabile cuipiam videatur) ad conclusiones suas demonstrandas. Etsi ex altera parte non negârim Geometriam quoq;, in irrationalium præsertim doctrina, lucem & præsidium ab Arithmetica mutuari. Porro Mathematice ex vi verbi omnia μαθήματα, id est, disciplinas

nas complectitur. Et hoc ſenſu Sceptici vtuntur vocabulo. Extant Sexti Empirici libri decem πρὸς τοὺς μαθηματικούς, adversùs Mathematicos, hoc eſt, vniverſam Dogmaticorum nationem. Nec enim illis in libris tam Geometriæ & Arithmeticæ, quàm Grammaticæ, Poëticæ, Hiſtoriæ, Rhetoricæ, Aſtrologiæ divinatricis, Muſicæ, Logicæ, Phyſicæ & Ethicæ fundamẽta convelluntur. Populari tamen vſu Græcorum omnium, Romanorum etiam ante Imperatores, de his noſtris tantùm artibus, ſeu quia primæ diſciplinæ, & diu ſolæ, ſeu quia nobiliſſimæ, ſeu quia certiſſimæ, nomen Mathematices vſurpatur. Nam Platonicum illud in Menone, & alibi, ideo dicta μαθήματα, quia, cùm omnis diſciplina reminiſcentia ſit, hæ ex omnibus diſciplinis facillimè in reminiſcentiam incurrant, vt ſomnium, rejicio. Atq; hæc eſt notio vocabuli Mathematices & Mathematici apud omnes in vniverſum Græcos, vt ex eorum ſcriptis liquet, & Latinos, vt dixi, ſtante Republica. Cicero, qui paulò ante Imperatores vixit, de Oratore 1°, *Quis ignorat, ij, qui Mathematici vocentur, quantâ in vb/cu-*

ritate rerum, & quàm recondita in arte, & multiplici subtiliq; versentur? De nostris hisce artibus loquens. Et alibi, In Mathematicis qui non didicerit, aut taceat oportet, aut ne sanus quidem judicetur. Quam Magistri sui præceptionem, vt hoc obiter dicam, cùm non observâsset nostra ætate Iosephus Scaliger, toti se mundo deridendum propinavit. Sed postea Imperatorum temporibus non alio ferè sensu vsurpatum est Mathematici vocabulum, quàm pro Genethliaco, Planetario, Vaticinatore & Ariolo; quod genus hominum Cicero de Divinatione, non alio, quàm Chaldæorum nomine appellat: quod gentis primùm, postea artis nomen extitit. Gellius libro primo, cap. 14. Vulgus autem, quos gentilicio vocabulo Chaldæos dicere oportet, Mathematicos dicit. Tacitus 1° historiarum, *vrgentibus Mathematicis &c. genus hominũ potentibus infidum, sperantibus fallax, quod in ciuitate nostra & vetabitur semper, et semper retinebitur.* Seneca in ludo Claudij: *Patere Mathematicos aliquando verum dicere*: id est, sinite Mathematicos, qui in prædicenda Claudij morte millies mentiti sunt, tandem aliquando

do verum dicere. *Iuvenalis* Satyra 14ª.

Nota Mathematicis Geneſis tua, ... & 6ª.
Nemo Mathematicus genium indemnatus habebit.

Tacitus ſecundo Hiſtoriarum; *Veſpaſianus* rerum dominus *Seleucum* quendam Mathematicũ rectorem palàm habuit. Mathematicos Magis & Ariolis annumerat *Iulius Paulus* Sententiarum lib. 5. cap. 21. De Vaticinatoribus & Mathematicis. Maximè verò in odium invidiamq; Mathematici iſti abjerunt, ex quo de ſalute Principum conſuli cœpti ſunt, & imperatorias Geneſes privatis prædicere. Vnde compluribus ſenatuſconſultis, principalibus decretis & edictis Mathematicos iſtos ſummotos accepimus. *Dio* Hiſtoriarum lib. 49°. *Agrippa* Aſtrologos & Magos ex vrbe ejecit. *Tacitus* Annalium 1°. Principatu *Tiberij*, *Stauro* & *Libone* conſulibus, factum de Mathematicis Magiſq; Italiâ pellendis ſenatuſconſultum. Idem 12°. Annalium, Claudianis temporibus, de Mathematicis Italiâ pellendis factum ſenatuſconſultum atrox, & irritum. Suetonius de Vitellio cap. 14. Mathematicum, vt quiſq; deferretur, inaudi-

tum capite puniebat, exacerbatus, quòd poſt Edictum ſuum, quo jubebat, vt intra Calendas Octobris vrbe Italiaq; excederent, ſtatim libellus eſt propoſitus; Et Chaldæos dicere, BONVM FACTVM, ne *Vitellius* Germanicus intra eundem Calendarum diem vſquàm eſſet: falsè ſatìs & facetè, niſi quod falſum. Neq; enim intra eum diem deceſſit, ſed tribus poſt eum diem menſibus, niſi ſi de Calendis Octobris ſequentis anni intellexerunt. *Vlpianus* de lege Dej, titulo 15°. de Mathematicis & Manichæis: Interdicta eſt Mathematicorum callida impoſtura: Imperante *Conſtantio*; Nemo Haruſpicem conſulat, aut Mathematicum, nemo Ariolum. Imperantibus *Valentiniano & Valente*: ceſſet Mathematicorum tractatus. Honorio & Theodoſio; Mathematicos non ſolùm vrbe Roma, ſed etiam omnibus civitatibus pelli decernimus; Cod. Theodoſiano, Titulo de maleficis & Mathematicis. Cod. Iuſtinianeo, lib. 9°. Titulo 18°. de maleficis & Mathematicis: Diocletianus & Maximianus Tiberio: Artem Geometriæ diſcere atq; exercere publi-

cè intereſt: ars autem Mathematica damnabilis eſt, & interdicta omninò. Digeſtis de iniurijs, lege 15. paragrapho; SI QVIS. Si quis Aſtrologus, vel qui aliquam illicitam divinationem pollicetur, aliquem furem dixerit, qui non erat, &c. Vbi notandum primò, *Vlpianum* Aſtrologũ vocare, quẽ aliæ leges, Mathematicũ. Secundo, Aſtrologos illius temporis non ſolùm Geneſes tractaſſe, & Prognoſtica aëris, ſed de rebus furto ablatis, & alijs hujuſmodi quæſtionibus conſulentibus reſpondiſſe: quæ *Ptolemæus* alicubi in Tetrabiblo, vt ſuperſtitioſa reijcit. Imò & ante Imperatorum tempora, *M. Popillio Lænate, Cn: Calpurnio* conſulibus, inquit *Valerius*, lib. 1. *Caius Cornelius Hiſpallus* Prætor edicto Chaldæos intra decimum diem abire ex vrbe atq; Italia juſſit; levibus atq; ineptis ingenijs, fallaci ſiderum interpretatione quæſtuoſam mendacijs ſuis caliginem inijcientes. Solus *Iulius Firmicus* temporibus Magni *Conſtantini* deſertæ ac propè deſperatæ cauſæ patrocinium ſuſcepit lib. 1. Matheſis, cum hac tamen conditione, vt negaret imperatoriam Geneſim regulis Aſtrologorum

ſubjectam eſſe, callidè ſibi cavens loco. Nã quid veteres philoſophi de hac arte ſenſerint, docet optimè Tullius 2° de Divinatione, his verbis: Ad Chaldæorum monſtra veniamus; de quibus *Eudoxus Platonis* auditor, in Aſtrologia judicio doctorum hominum facilè princeps, ſic opinatur, id quod ſcriptum reliquit: Chaldæis in prædictione & in notatione cujuſq; vitæ ex natali die minimè eſſe credendum. Nominat etiam *Panætius*, qui vnus è Stoïcis Aſtrologorum prædicta rejecit, *Archelaum* & *Caſſandrum*, ſummos Aſtrologos illius ætatis, quâ erat ipſe, cùm in CAETERIS ASTROLOGIAE PARTIBVS excellerent, hoc prædictionis genere non vſos. *Scylax* Halicarnaſſeus, familiaris *Panætij*, excellens in Aſtrologiâ, idemq; in ſua civitate princeps, totum hoc Chaldæorum prædicendi genus repudiavit. Vbi tamen obſervare poterunt adoleſcentes, Chaldæos ætate Ciceronis Aſtrologos dici cœptos, & Chaldæorum doctrinam, vt partem Aſtrologiæ, numeratam. Hæc veteres Græci, & Latini. Nimius eſſem, ſi ex Patribus Latinis & Græcis

omnia

omnia proferrem, quæ de hoc argumento in ſcriptis reliquerunt: vnus pro omnibus ſufficit Tertullianus libro de Habitu muliebri, & iterum libro de Idololatria, cuius ea eſt ſententia, vt putet Angelos, qui ceciderunt de cœlo, auctores fuiſſe Aſtrologiæ. Expelluntur, inquit, Mathematici, ſicut Angeli eorũ. Vrbs & Italia interdicitur Mathematicis, ſicut cœlum Angelis eorum: eadem pœna eſt exitij diſcipulis & magiſtris. Atq; hæc de pſeudomathematicis; nunc ad veros & germanos Mathematicos redeamus. *Plato* tria genera Entium ponit, quæ ſub ſcientiam cadunt; νοητὰ, id eſt, intellectilia; αἰσθητὰ, ſenſibilia; & inter hæc interiecta media, τὰ διανοητὰ, cogitatione ſcilicet, ſeu, vt alij malunt, imaginatione comprehenſa. Intellectilia, primæ philoſophiæ ſubiectum, cogitabilia Mathematices; Senſibilia Phyſiologiæ. Nec multò aliter philoſophorũ princeps Ariſtoteles 2°. Phyſicorum, Alia eſſe & re & ratione ſeu definitione ſeiuncta à motu & materia, de quibus tractat prima philoſophia: Alia re & ratione coniuncta cum materia, de quibus

Phy-

Physiologia: Alia re innexa materiæ, sed ratione, seu definitione χωριστὰ, se parata, καὶ οὐδὲν γίνεται ψεῦδος τῶν χωριζόντων, neq; mentiuntur, qui ita separant, vt qui Ideas ponunt. Estq; Mathematice, vt rectum, curvum; Physice, vt simum. Quorum illud sine materia & mente concipitur, & definitur: cùm si quis definire voluerit simitatem, necesse sit eum materiam coassumere sic; simitas est excavatio in naso. Cùm igitur tale sit artium Mathematicarum subjectum, de partibus videamus. Quam re *Aristotelem & Geminum*, vt duces tutissimos, sequentes, artes Mathematicas alias dicemus purè Mathematicas, alias φυσικωτέρας, vt loquitur *Aristoteles*, aliquatenus physicas, cum motu & materia quodammodo conjunctas. Mathematices purè dictæ species sunt totidem, quot sunt species quantitatum verè & propriè dictarum, διωρισμένη scilicet & συνεχὴς, vt in Categorijs Aristoteles: vel πόσον & πηλίκον, id est, quotum & quantum, sive quàm multum & quàm magnum; vel πλῆθος καὶ μέγεθος, hoc est, numerus & magnitudo, vt idem Aristoteles 5° Metaphysicorum, vbi re ad accura-

tius

tius examen revocata, tempus & motum, id est, subjectum propè adæquatum Astronomiæ, quantitates esse dicit tantùm per accidens, nulla mentione facta loci, aut Orationis, vt ne impropriè quidem quantitates esse voluisse videatur. *Archytas* Tarentinus, *Athenodorus*, & *Ptolemæus*, teste *Simplicio*, Sectione 13, de quantitate, addunt Pondus seu momentum, pro tertia specie quãtitatis. Quamvis in *Archytæ* libello de prædicamentis vulgato nil tale reperiatur, vt spurius libellus ille esse videatur, si verus Simplicius, quanquam sit Doricè scriptus, dialecto *Tarentinorum* & illius tractus peculiari, ad fucum fortasse faciendum. Iam discreta quantitas sive Numerus, Arithmeticæ; Magnitudo, Geometriæ subjectum est adæquatum. Mathematicæ non simplicis & puræ, sed cum materia quodãmodo mixtæ sex species ponit doctissimus Geminus: Primo loco, Canonicem sive Musicam; Secundo, Logisticam sive supputatricem, (Arithmeticã practicã appellamus) Tertio, Geodæsiam (Geometriam practicam vocant) Quarto loco, Opticam; Quinto, Mechanicam; Et sexto, Astrologiam.

giam. Quòd ſi quis malit Logiſticam ſub Arithmetica, & Geodæſiam ſub Geometria comprehendere, non admodum repugno: vt Mathematices non plures ſint quàm ſex ſpecies; duæ puræ, Arithmetica, & Geometria; quatuor mixtæ; Muſica, Optica, Mechanica, & Aſtrologia: eam intelligo, quæ de motibus tractat cœleſtibus. Nam veteres omnes, vt hoc obiter moneam tirones, Aſtronomiâ & Aſtrologiâ vtuntur vt Synonymis: Plato ferè Aſtronomiæ vocabulo vtitur, Ariſtoteles Aſtrologiæ, ἀρχαϊκῶς, per archaiſmum, priſco & obſoleto more, vt vult Simplicius ad libros de cœlo. De diſtinctione horum vocabulorum, quæ & ante multos annos cœpit, & etiamnum obtinet, audite, ſi placet, eundem Simplicium ad ſecundum Phyſicorum. Cùm, inquit, apoteleſmatica illa divinatrix nondum ad Græcos perveniſſet, (notate, auditores, melioribus Græciæ temporibus inter eruditos non fuiſſe receptam, quanquam fuerit illa antiquiſſima, ſiue ars, ſiue impoſtura) Aſtrologiæ nomine vſi ſunt veteres de ea, quæ nunc Aſtronomia audit. Sed recentiores, diviſo nomine (inquit)

quæ

quæ motus considerat corporũ cœlestium, Astronomiam vocant; quæ eventa & ἀποτελέσματα, propriè Astrologiam. Hæc *Simplicius*, cum superiùs allegatis ex eodem ad libros de cœlo consentiens. Nos cum veteribus, certissimis & loquendi & sentiendi magistris, quandoq; loqui, & Astrologiã ab Apotelesmatica sejungere non pigebit. Sed ad Geometriam nostram revertamur. Scitum est, vocabula non esse paria rebus, sed numero longè pauciora. Hinc tot καταχρήσεις, tot in omnibus ferè auctoribus obscuritates; hinc mater errorum, Aequivocatio. Sunt autem verba aliquando angustiora re significatâ, aliquando latiora. Ac ne longè abeamus, Geometria à terra mensuranda dicitur, cùm non tantùm terræ (vt rectè notat Grammaticorum doctissimus Seruius) sed & maris & cœli & aëris spatia metiatur: vt non immeritò Plato in Epinomide nomen Geometriæ ridiculum esse dicat, cùm sit multò angustius re significatâ. Cõtrà in hac eadem arte πλάγιον, cum ex vi verbi omnem significet figuram quadrangulam, ex vsu tamen artis non aliam denotat figuram,

quàm eam, quæ quatuor habeat rectos angulos, & quatuor latera æqualia: Latini Quadratum aptiùs. Iam Geometria latiore & vsitata significatione dividitur in ἐπιπέδων θεωρίαν, id est, superficierum contemplationem; & στερεομετρίαν, solidorum, quæ tribus postremis libris ab Euclide, vel, vt veriùs dicam, ejus scientiæ potiùs elementa traduntur. Nam de punctis & lineis, vt ait Proclus, nulla est instituta ab Euclide in Elementis peculiaris tractatio. Geometriæ inventionem tribuunt omnes vno censensu Aegyptijs, sed diverso modo. *Plato* in *Phædro*; *Theuth* Aegyptiorum numen quoddam (à quo denominatus est, vt puto, primus Aegyptiorum mensis Thoth) inventorem perhibet Arithmeticæ, & Geometriæ & Astronomiæ. *Proclus & Seruius*, ex necessitate, vt plerasq; alias artes, ortum habuisse testantur. Cùm enim propter annuas alluviones Nili confunderentur possessionũ termini, ad hos restituendos inventa est agrorum mensurandorum ratio & via: vt ita à rusticis agri-mensoribus primam originem Geometria traxisse videatur. Contrà

Aristoteles 1°. Metaphysicorum, non à rusticis, sed post necessitatis inventa, quæ ordine semper prima sunt, à sacerdotibus initium sumpsisse scribit: in Aegypto, inquit, primò Mathematicæ artes coaluere. Ibi enim permissum erat sacerdotibus in otio cum dignitate vivere; vt verisimile sit rudem primò & impolitam agri-mensorum Geometriam à sacerdotibus otio & ingenio abundantibus excultam & perpolitam. Geometriam ex Aegypto in Græciam primus deduxit Thales, amplificavit Pythagoras. Quibus successerunt, auctore Proclo, Anaxagoras, Oenopides, Theodorus Cyrenæus, Hippocrates Chius, Plato, ejusq; auditores Leodamas, Archytas, Theætetus, Neoclides, Leon, Eudoxus, Amyclas, Menæchmus, Dinostratus, Theudius, Cyzicinus, Hermotimus, Philippus. Quibus ætate suppar Euclides Geometriam à prioribus fundatam ad illud perduxit fastigium, vt omni penè posteritati spem præciderit artis amplificandæ. Enituit tamen post hunc divini vir ingenij Archimedes, qui omnium tam antecedentium, quàm subsequentium Mathematicorum lu-

minibus offecit, & minorum gentium geometra Eratosthenes. Hos insecuti Apollonius Pergæus, Geminus, Theodosius, Menelaus Geometra dictus, & alij ex schola ferè Alexandrina Euclidis profecti omnes, vsq; ad tempora Saracenorum. Qui [Saraceni] constitutâ primùm republicâ, & pacato, vti assolet, imperio, naturali quodam decursu animos ad philosophiam discendam & ornandam appulerunt, homines acuti & diligentes. Aristoteles 1° Ethicorum duo constituit rerum genera, vnum τὰ φύσει συνεστῶτα, eorum quæ natura constant, aliud, τὰ νόμῳ καὶ θέσει, quæ lege & instituto hominum. Eorum, quæ à natura dependent, habentq; subsistentiam quandam naturalem, scientiæ sunt, Logica, Naturalis philosophia, Mathematicæ omnes, Metaphysica, Medicina. Alterius generis, quæ ex lege & instituto, Moralis philosophia, Politica, Oeconomica, Iurisprudentia, Grammatica, Rhetorica, Poëtica. Nam & Averroës, si bene memini, in primum Physicorum, Hesiodus, inquit, fuit vnus legista. In vtroque genere disciplinarum excelluere veteres Græci, addo etiam

etiam recentiores : in posteriore Romani, in priore Arabes : qui, versis in linguam suam omnium veterum Græcorum in eo genere libris, eousq; studio & ingenio profecerunt, vt vix Græcis ipsis cedere videantur. Hinc Auerroës in omni penè philosophia alter Aristoteles : Hinc Auicenna (vt reliquos, qui in medicina claruerunt, omittam) Auicenna, qui primus artem conscripsit, cùm antea Galenus sparsim per occasionem de diversis argumentis pro re nata disseruisset. Nam praxim Arabum infinitis modis excedere praxim veterum Græcorum fatentur omnes. Hinc in Mathematicis Geber, Albitegnius, Thebitius, alij. Et quidem nos occidentales Europæj Arabibus primis omnium debemus Aristotelem, Euclidem, Galenum, Ptolemæum, cæteros Græcorum Principes, cùm ante centum annos aliæ versiones nullæ, præterquam ex Arabico, fuerint in manibus nostrorum hominum, quòd Græcæ linguæ cognitio nondum in Italiam & Occidentem immigrâsset. Hæc de Euclide, & ad Euclidem : superest, vt pauca attexam de Ptolemæo.

Hoc

Hoc enim nobile par, & concordem ζυγωρίδα, vt duas rerum Mathematicarum firmissimas columnas (sic namq; coniunctim à Gregorio Nazianzeno, qui per excellentiam Theologus, ponuntur in Epitaphio Cæsarij fratris, adiuncto, tertio in loco, Herone: de quo, cùm non aliud, quod sciam, eius ingenij monumentū supersit, præter Pneumatica, non possum iudicare. Nam de Geodæsia libellum nihili, qui vulgo sub Heronis nomine circumfertur, & in schedis meis alicubi manuscriptus reperitur, vt indignum tanto nomine, prorsus aspernor) hos ergo duos, Euclidem scilicet & Ptolemæum, vel solos, vel certè vt præcipuos Professoribus meis commendo Auditoribus suis enucleandos. Tria habentur apud doctos naturæ miracula, Plato, Aristoteles, Ptolemæus; quos veteres, præscriptim Platonici, tribus diuersis ornant elogijs. Plato θεῖος audit, hoc est, Divinus: Aristoteles δαιμόνιος, quasi supra sortem humanam, & ad divinam proximè accedens (Dæmones enim, vt nostis, Platonicis Numina quædam sunt, & quasi dij minorum gentium) Ptolemæus θαυμάσιος, admirandus:

mirandus: iure merito admirandus, cuius hoc est singulare & planè mirabile, quòd vel solus, vel certè post Aristotelem solus, in quatuor diversis facultatibus libros ediderit, quorum quisq; in suo genere primas apud omnem posteritatem teneat, tenuerit. Nam vt nihil est Mathematicæ cõstructioni par & æquale, ita nec in Musica tribus Harmonicorum libris (quos Græcè manuscriptos dedi Bibliothecæ communi) nec in Geographia octo libris ὑφηγήσεως γεωγραφικῆς, nec in Apotelesmaticis Tetrabiblo, Quadripartitum vocant. Sed inter omnes facile principatum obtinet Almagestum. Aristoteles, omnium mortalium curiosissimus Naturæ indagator, Callistheni discipulo, Alexandrum Magnum in Asiam comitaturo, & vltimum Orientem, mandavit, teste Simplicio ad 2^m de cœlo, vt earum rerum, quas veteres Chaldæi & Babylonij de cœlo seruâssent, commentarios ad se descriptos mitteret. Magistro obsecutus discipulus, obseruationes misit duorum millium annorum, vt habet codex vulgatus Simplicij; vt meus manuscriptus, vnius & triginta millium.

qui tamen numerus à Ciceroniano in primo de Diuinatione immane quantum ſuperatur, vbi Babylonios annorum quadringentorum & ſeptuaginta millium obſeruationes monumentis comprehenſas habuiſſe ſcribit. Sed de numero annorũ, vtcunq; ſit, hoc certũ eſt, ipſo multis in locis Almageſti citante Ptolemæo, ex his Babyloniorũ & aliorũ veterũ obſeruationibus concinnatũ nobis hoc admirandũ Almageſti volumen, excogitatis ingenioſiſſimis hypotheſibus, quæ ſuperiorum temporum phœnomenis reſponderent, & relictâ methodo, qua poſteritas omnis, ſuâ quiſq; ætate, præſtare poſſet, quod ipſe in ſua præſtitiſſet; inventis ſcilicet inſtrumentis ad ſervandum de cœlo accommodatiſſimis, quorum & fabricam nos docuit, & ſitum, & vſum. Sed de Almageſto ſatis; aut ſiquid ſupereſt, ad Aſtronomiæ profeſſorem delegandum cenſeo. Extat etiam Ptolemæi de Analemmate libellus, ab Olympiodoro in commentarijs in Meteora Ariſtotelis laudatus; extat de planiſphærio, vterq; à Commandino cum commentarijs accuratis editus, ex Arabico vtcunq; concinnati; nam

Græca

Græca perierunt. Habeo in manibus Latinè quatuor libros de perſpectiva Ptolemæo adſcriptos, quos etiam Arabibus debemus, eruditè ſcriptos & elegantèr, ex Græco fonte ſine dubio. Citatur enim à Simplicio ad primum de cœlo expreſſis verbis, Optica Ptolemæi. Nam libri περὶ φαίνων ὑποθέσεων τῶν ἀπλανῶν extant apud me Græcè, & elegantiſſimus de hypotheſibus Planetarum libellus, & ejuſdem canones πρόχειροι, faciles, expediti, ex dono meo extant in Bibliotheca communi Vniverſitatis. Mechanicorum Ptolemæi tres libros commemorat Suidas, ejuſdem librum περὶ ῥοπῶν Eutocius ad Iſorrhopica Archimedis, & Simplicius ad quartum de cœlo; & ejuſdem tractatum ad quintum poſtulatum, Proclus & alij. Simplicius ad primum de cœlo libri μονοβίβλου meminit Ptolemæj περὶ διαστάσεως, id eſt, de interuallo, & alterius περὶ στοιχείων, de Elementis; Item ſecundi libri hypotheſium, niſi ſit error in codice. Eſt enim μονόβιβλος libellus iſte Hypotheſeon, qui in manibus: de Tetrabiblo ſuperuacuum fuerit monere: quem tamen librum (quamuis à veteribus, Por-

phyrio, qui in eum ſcripſit commentarium, & Proclo, qui paraphraſim elegantem, receptũ) pleriq; Ptolemæo abiudicant. Quiſquis is fuit, certè auctor Tetrabibli ab ipſo ſtatim principio Ptolemæi, qui conſtructionem condidit, titulum ſibi videtur vindicare. Mathematicam Syntaxim (eo enim nomine ſemper citat ipſe Ptolemæus) poſteritas μεγάλης συντάξεως nomine decorauit: Arabes Almageſtum vocant, quaſi τὸ μέγιστον: Suidas τὰ μέγαι ἀστρονόμων, cuius rei ratio hæc eſt: Terebantur manibus ſtudioſorum, ac præſertim in ſchola Alexandrina duo volumina Aſtronomica: quòrum vnum μέγαν ἀστρονόμων, vocabant, hanc ipſam Ptolemæi conſtructionem; alterum μικρὸν ἀστρονόμων, vel vt habet Pappus in ſexto, μικρὸν ἀστρονομούμενον. Hoc volumen integrum in Bibliothecis Galliæ & Italiæ ſæpe vidi, continetque nouem diverſos tractatus ſequentes: primo loco, Theodoſij Sphæricorum libros tres: ſecundo, Euclidis Optica: Tertio eiuſdem Phænomena: Quarto, Theodoſij libellum de habitationibus: quinto, Eiuſdem de Noctibus & Diebus, libros duos: Sexto, Autolyci

lyci librum de Sphæra mota: Septimo, eiusdem de Ortu & Occasu libros duos: Octauo, Aristarchum Samium de Magnitudinibus & distantijs solis & lunæ: vltimo, Hypsiclis ἀναφορικὸν, siue de ascensionibus. Quos omnes Græcè, excusos aut manu-scriptos, donaui communi Bibliothecæ ad vsum Professorum meorum.

LECTVRA III.

Θεσις, *Definitiones.*

REctè Aristoteles, omnis doctrina & omnis disciplina διανοητικὴ, discursiva, ex præexistente fit cognitione, non tamen procedente in infinitum (nam ita nihil omnino foret cognitum) sed ex ea præcedente cognitione, quæ tandem desinat in propositiones immediatas, quibus nihil neq;

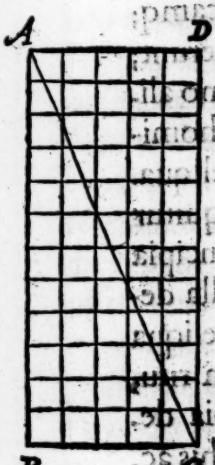
prius in arte, neq; notius: quas, vt in reliquis artibus, ita in Geometria vocamus principia. Iam principia demonſtrationis Ariſtoteles, & poſt eum Themiſtius in Axiomata dividit & Theſes. Axiomata ea ſunt, quæ neceſſe eſt diſcentem domo adferre, & à ſeipſo noſſe, quaſi congenita nobis, non indita aliunde, non à præceptore, non à præcedente cognitione. Suntq; Axiomata, aut communia omnium ſcientiarum, vt alterum ex contradicentibus verum eſſe, alterum falſum: aut plurium, vt ſi ab æqualibus æqualia demas, &c: aut vnius, vt duæ rectæ lineæ ſuperficiem non claudunt, & ſimilia. Theſes (quæ item vt ſuperiores, indemonſtrabiles ſunt, non tamen à ſeipſo, aut domo adfert, qui diſcit, ſed à magiſtro oportet accipere) dividuntur in definitiones & hypotheſes. Definitio eſt oratio indicans quid ſit res, & conſequenter rem eſſe: Hypotheſis, quæ non ex naturali & ingenita pendet notione, ſed ab artifice ponitur. Hæc rurſus duplex, Hypotheſis nomine generis, quæ ſimul atq; auditur, à diſcente admittitur (vt à quolibet puncto ad quodlibet punctum rectam

ctam lineam ducere) & poſtulatum: hoc eſt, propoſitio, quæ neq; nota eſt, neq; manifeſta, ſed à diſcente tantiſper conceditur, à magiſtro ſcilicet poſtulata: quale eſt quintum poſtulatum, ſi recta in duas rectas incidens facit duos angulos minores duobus rectis &c. Et hæc quidem eſt Ariſtotelis de principijs doctrina, non vt putat doctiſſimus Zabarella, populari deceptus errore, ab Euclide accepta, quem fortaſſe Ariſtoteles nunquam legerat, aut per ætatem ne legere quidem fortaſſe potuerat, ſed ab ipſa hauſta rei naturâ. Proclus itidem ex Ariſtotele, vti aſſerit, tria ponit genera principiorum; Hypotheſes, hoc eſt, definitiones, Axiomata, & Poſtulata; quam diuiſionem ſequitur noſter στοιχειώτης. Ex his principijs inter ſe ſyllogiſticè connexis, vel ex demonſtratis per hæc principia conficitur Syllogiſmus demonſtratiuus. Nam vt per definitiones, poſtulata, & axiomata, componuntur propoſitiones priores Euclidis, ita per eas legitimè demonſtratas, tanquam per principia, demonſtrantur reliquæ vſq; ad vltima principiata. Vt magno cum iudicio definiſſe videatur

deatur Aristoteles 1° Topicorum, Demonstrationem esse, quando ex veris & primis syllogismus fit, (scilicet propriæ passiones de subiecto demonstrantur) aut ex illis, quæ per vera quædam & prima initium cognitionis acceperunt. Sunt enim principiata ritè demonstrata, sequentibus vice principiorum. Vis ergo principiorum, etsi in multis, vel plurimis potiùs demonstrationibus Geometricis expressè non appareat, pertinet tamen & permeat per totum Geometriæ corpus vsq; ad vltima, hac semper seruatâ conditione & regulâ, vt nihil sumatur pro vero, nisi demonstratum; nihil demonstretur, nisi ex antecedentibus. Quo fit vt ordo, quem isti Thessali Methodistæ cum suis bellis emblematis, κατὰ παντὸς, καθ' αὐτὸ, καθόλου πρῶτον, à scipsis parum intellectis, requirunt ab Euclide, quo nihil vnquam vidit hic sol καθολικώτερον, seruari non potuerit; nisi si quis est adeo ineptus, vt nescio cuius imaginariæ venustatis rationem habendam putet, neglectâ sanitate. Exemplum esto illustre in penultima primi, quæ de quadrato ex latere subtenso recto angulo in Orthogonio

gonio triangulo docet. Cui per viam de congruo, & regulam illam in scholis tritam, opposita iuxta se posita &c. annecti proximè oporteret penultimam & antepenultimam secundi libri, quæ de reliquis Triangulis contrarium demonstrant. Sed nec hæ sine præcedentibus in secundo, nec præcedentes in secundo sine penultima primi demonstrari legitimè potuissent. Quam in Geometria admirandam εὐταξίαν præclarè exprimit contra Thessalum Galenus, contra hunc nostrum eadem dicturus, si viueret, in hæc
„ verba. Qui rationem inventionis suæ
„ ducem sequuntur ac ordinem, vnicamq;
„ viam, quæ ad finem ducat, proposuerunt;
„ ijs fuerat quidem necessarium à primo ali-
„ quo auspicatis, de quo inter omnes homi-
„ nes conveniret, sic transire ad reliqua.
„ Cæterùm hanc rationem non sequitur
„ pleraq; medicorum pars, imò principia
„ quoq; ipsa controuersa sumit, nec illa de-
„ monstratione confirmat; tum ad reliqua
„ simili modo transit, Legislatorum ritu,
„ edicta sanciens veriùs, quàm dubia de-
„ monstrans. Quæ omnia inde adeò his ac-

„cidunt, quòd nihil priùs de demóstratione
„didicerint, sed simul & ijs, quæ in quæ-
„stione versantur, insistunt, & ad eorum si-
„dem demonstratione vti audent, simile
„profectò quiddam ijs molientes, qui sphæ-
„ram, aut cubum, aut conum, aut cylin-
„drum, aliudve id genus metiri aggredi-
„untur, cùm tamen omnis Geometricæ ac
„Logisticæ rationis sint ignari; imò verò
„nec cubiti, palmive, aut pedis mensuram
„antea nouerint: ac deinde ijs qui vel de-
„monstrationem ab ipsis exigunt, vel tacere
„censent, irascuntur.



Sed verba quæ sequuntur Galeni ex-
planemus, si placet, per figurã. Sit qua-
drãgulũ rectangulũ ABCD, cujus la-
tus AD sit quinq; pedũ, & latus AB
12 pedũ. nam cõtraposita BC & CD
sunt æqualia singula singulis, scilicet
BC rectæ AD, & CD rectæ AB. & di-
vidatur vtrúq; AB, BC in suos pedes,
& ducantur rectæ AB quinq; rectæ
parallelæ, rectæq; AD duodecim re-
ctæ parallelæ: secabitur vt hic videtis
per lineas ita descriptas area tota qua-
dran-

dranguli ABCD in ſexaginta pedes quadratos, hoc eſt quinquies duodecim. Deinde ab A ad C ducatur diagonius A C: recta A C dividet aream quadranguli bifariam, vt eſt diagoniorum natura. Triangulus igitur A B C erit pedum quadratorum triginta. Iam redeamus ad verba Galeni. „Veluti enim ibi ridiculus erit is, qui re„ctanguli trigoni, cuius alterum (exem„pli cauſa) latus circa rectum angulum „quinq; ſit pedum, alterum duodecim, „dicat aream non eſſe triginta pedum, ſed „quadraginta, nec eius rei demonſtratio„nem vllam afferat: ita hic quoq; ridicu„lus eſt, qui quicquam affirmat, quod de„monſtrare non poſſit. Ergo ſicuti in de„monſtratione de Triangulo (neq; enim „recedendum nobis ab exemplo eſt) ipſum „quod propoſitum eſt, ex duabus his pro„poſitionibus colligebatur, vnâ, quæ ſpa„tium quadrilaterum rectangulum, quod „lateribus pedum quinq; & pedum du„odecim continetur, ſexaginta pedum „(quadratorum) effici dicit: alterâ, quæ tri„angulum dimidium eius eſſe ſpatij propo-

„nit, atq; oſtendit: harum vtraq; rurſus vt
„demonſtrationis fidem reciperet, alijs pro-
„poſitionibus egebat; mox illæ alijs, quo-
„ad peruentum ad primas eſſet. Hæ verò
„nec ex alijs, nec per demonſtrationem, ſed
„ex ſe fidem faciunt. Sic arbitror & in ijs
„omnibus, quæ in medicina demonſtran-
„tur, ad primas & indemonſtrabiles pro-
„poſitiones, & quæ ex ſe fidem faciant, aſ-
„cendendum eſſe. Ac, ſi omnes de medendi
„methodo ſic dicere aliquid inſtituiſſent,
„prorſus, ſicuti inter Arithmeticos, Geo-
„metras & Logiſticos, ita inter ipſos quoq;
„conueniſſet: quippe apud illos diſcere
„ab ipſo ſtatim initio licet, quid quoq; no-
„mine, quo vſuri ſunt, ſignificetur; hoc eſt,
„ſubiecti naturam & definitionem: quas
„præterea propoſitiones indemonſtrabiles
„(quæ axiomata vocant) ad demonſtratio-
„nem ſint ſumpturi; veluti lineam eſſe lon-
„gitudinem citra latitudinem; ſuperficiem,
„quæ longitudinem latitudinemq; tantùm
„habeat; & triangulum eſſe hoc, quadran-
„gulum illud: ac reliqua ad eundem mo-
„dum. Deinde vbi axiomata huiuſmodi

„vſur-

„ vſurpanda ſibi eſſe prædixerint, quòd ſci-
„ licet, quæ eidem ſunt æqualia, inter ſe eti-
„ am eſſe æqualia: &, ſi æqualibus æqualia
„ ſint adiecta, tota fore æqualia: poſtea de-
„ monſtrare Theoremata iam tentant, nihil
„ extra ea, quæ à principio præſumpſerunt,
„ adijcientes.

Hæc Galenus lib. 1°, θεραπευτικῆς, Methodi medendi, cap. 4. Tom. 4° Baſilienſis editionis græcè pag. 39. ex verſione Thomæ Linacri, maximi Britanniæ noſtræ ornamenti. Sed redeamus ad definitiones. In definitionibus duo modi ſunt argumentandi; prior directus, à definitione ad definitum, qui rarioris in Geometria vſus; alter indirectus, à definito ad definitionem, qui frequentiſſimus. Prioris exempla licet videre apud Theodoſium primâ primi Sphæricorum, apud Apollonium 4ª, & 5ª primi Conicorum, apud Serenum propoſitione 5ª de ſectione Cylindri. In quibus omnibus ab æqualitate quarumlibet linearum ab aliquo puncto ad lineam quandam ambientem in eodem plano ductarum, oſtenditur illa ambiens linea eſſe peripheria circuli, argumēta-

tione ducta à definitione ad definitum. Posterioris exempla vbiq; occurrunt, statim in primâ primi Elementorum, & passim in omnibus ferè propositionibus.

Definitio prima; Σημεῖόν ἐστι &c. Punctū est, cuius pars nulla. Septem priores definitiones perspicuitatis gratia ponuntur magis, quàm vsus. Vix enim vnquam vtitur vlla ex ijs inter demonstrandū Geometra, vt nec multis alijs ex sequentibus. Sed sine illis nec subiecti Geometrici latitudo, nec ipsa prima fundamenta Geometriæ, quot & qualia sint, intelligi potuissent. Quod ad primam definitionem attinet, duo sunt vocabula idem significantia apud Græcos; σημεῖον, signum vel nota, & στιγμὴ, punctum. Priore vtitur Euclides, & ab eo ferè omnes Mathematici: posteriore magis Aristoteles, Plato, veteres. Prioris vocabuli varius est & multiplex vsus, non in Mathematico solum genere, posterius magis proprium Mathematicorum, ἀπὸ τῆς στίξεως, notam inurere: vnde & stigmatia de seruo fugitiuo & nequam, qui candente ferro solebat esse in fronte aut reliqua facie compunctus. Et quidem in natura.

turalibus acu-punctum proximè accedit ad naturam puncti Mathematici. Cùm ſignum itaq; & punctum in Mathematicis planè idem ſint, valeat illa inanis diſtinctio Vallæ, Punctum vocari, cùm medium tenet lineæ vel figuræ: Signum, cùm principium vel finem. Porro contra hanc definitionem multæ ſunt, eæq; non leues obiectiones: prima, quia per negationem effertur, quod Ariſtoteles ſexto Topicorum improbat: verè, quis negat? cùm omnis definitio debeat indicare quid res ſit, non, quid res non ſit. Ab eodemq; Ariſtotele definitio lineæ, quæ proximè ſequitur, Linea eſt, μῆκος ἀπλατὲς, Longitudo latitudinis expers, ibidem reijcitur nominatim & expreſsè. Quàm verò ſit abſurda definitio per negatiuas, inſigne nobis dat Porphyrius documentum in definitione Accidentis. Accidens eſt, inquit, quod neq; Genus eſt, neq; Differentia, neq; Species, neq; Proprium: ac ſi quis definiret hominem eſſe, quod neq; bos eſt, neq; aſinus, neq; equus, neq; Elephas: quo quid ineptius? Hanc obiectionem ita ſoluit Proclus, vt dicat ἀποφατικὸς λόγος, Accidens

λόγους, id est, definitiones negatiuas conuenire principijs ex auctoritate Parmenidis, qui primam causam & vltimam per solas negationes tradi docet. Omne namq; principium, diuersa ab ijs, quæ scatent ex principijs, constat essentiâ: & principiatorum negationes principij nobis patefaciunt proprietatem. Quod enim principiatorum est causa, nihil autem horum est, quorum est causa, per hunc negativum dicendi modum tantummodo innotescit; vtpote quod nihil habeat positivum se prius aut simplicius. Quemadmodum autem punctum dici queat principium magnitudinum, dicetur infrà: nunc alia contra hanc definitionem objectio non leuior diluenda. Nam cùm omnis definitio debeat esse convertibilis cum definito, definitio puncti ab Euclide hic tradita, (*cuius pars nulla*) vnitati in numeris, & τῷ νῦν, ipsi nunc, in tempore, quod instans appellamus, non minùs convenit, quàm puncto. Ne quis enim existimet vnitatem partes habere propter fractiones, quas vocant, & partes integri, vt semissem, trientem, bessem, dodrantem, &c: vsq; ad millies millesimam partem assis

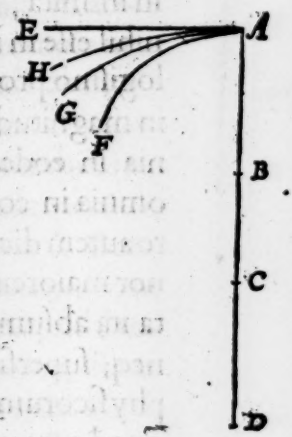
sive

ſive integri; ſciant adoleſcentes, vnitatem in abſtracto nullam admittere poſſe per naturam partitionem; ſed has omnes minutias eſſe vnius in concreto, ſive continuæ quantitatis, vt vnius lineæ, vnius trianguli, ſive vnius per aggregationem, vt vnius modij vel medimni tritici, vnius minæ aut talenti argenti. Sic ergo conſtet, vnitatem omnino impartibilem eſſe, vnum pro ſubjectæ materiæ diviſibilitate poſſe infinities dividi. Habemus ergo non aliud ſolùm, ſed alîus planè generis, quod recipit definitionem puncti. De ipſo Nunc, termino ſcilicet temporis præteriti & futuri, res eſt ſine controverſia, terminum nullam recipere diviſionem, quà terminus eſt: vt punctum nullam recipit diviſionem in longum; linea nullam in latum; ſuperficies nullam in profundum. Quid ergo dicemus? Placet apprimè doctiſſimi Procli ſolutio; non ſolùm punctum eſſe ἀμερές, ſine partibus, ſed tamen ſolùm, ὡς πρὸς γεωμετρικὴν ὕλην, quoad materiam Geometricam. Reliqua enim omnia, quæ ad Geometricum ſubjectum pertinent, diviſibilia ſunt. Et ita convenit Geometram dicentem audi-

re. Atq; hæc ferè sunt, quæ contra hanc definitionem objiciuntur. Iam de Principij ratione pauca disseramus. Duarum igitur quantitatis specierum, quæ subjecta sunt adæquata duarum artium Mathematicarum, Numeri & Magnitudinis, duo sunt distincta principia, Punctum & Vnitas, non quidem vnivocè dicta principia, sed planè ὁμωνύμως. Nam vnitas est principium constitutivum Numeri, materiæq; rationē habet, καὶ τοῦ ἐξ οὗ, id est, ejus ex quo (ex pluribus enim vnitatibus numerus conficitur) cùm tamen linea ex punctis nullo modo conficiatur, neq; in Puncta dividi aut resolui queat, vti est à Philosopho demonstratum sexto Physicorum, cap: primo, & sequentibus, & à Geometra tanquam necessarium λῆμμα præsupponitur. Neq; enim potest Geometria aliter consistere, nisi suppositâ illâ divisione continui in semper dividua: quod idem in divisione Anguli intelligere oportet. Vt enim nihil est in Numero maximum, ita Geometræ necessariò supponendum nihil esse in Magnitudine, Angulouè minimum. Nam & angulus ille κεραταειδής, hoc est, cornutus,

angu-

angulum contingentiæ vocant, in tertio Elementorum potest in suo genere infinitè minui & augeri, neq; tamen vnquam ad quantitatem anguli rectilinei dabilis quantumcunq; parui pervenire: quod vnum est ex Geometriæ paradoxis vel maximum. Quod vt meliùs intelligatur, sint rectæ D A A E concurrentes in A ad angulum rectum, & centro D intervallo D A describatur peripheria A H, centroq; C interiùs sumpto describatur peripheria A G, & centro B adhuc interius sumpto describatur peripheria A F. erit angulus ad A ab E A recta & H A peripheria comprehensus minor quam angulus G A E, & G A E adhuc minor quam angulus F A E, & sic in cæteris; & tamen angulus F A E qui horum trium maximus est, minor est quolibet angulo rectilineo, etiamsi sexcenties dividatur, cujus rei demonstrationem expectabitis à meo successore ad tertium elementorum. Hæc explanationis causa dixisse sufficiat.



Neq; obſtat huic in infinitum diviſioni, quod Ariſtoteles in 1°. phyſicorum contra Anaxagoræ ὁμοιομερείας diſputans neget ἀφαίρεσιν, detractionem illam partium ſimilarium perpetuam poſſe conſiſtere. Neq; enim diviſio continui in infinitum intelligitur actu, ſed potentiâ; & in infinitum, non in infinita, vt loquitur Proclus. Iam verò nihil eſſe in magnitudine minimum hoc ſyllogiſmo probare poſſumus. Si eſt aliquid in magnitudine minimum, menſurabit omnia in eodem genere; ſed nihil menſurat omnia in eodem genere: ergo. Menſurare autem dicitur quantitas quantitatem, minor maiorem, cùm minor aliquoties ſumpta ita abſumit maiorem, vt nihil neq; deſit, neq; ſuperſit. Maior eſt Ariſtotelis in 5°. phyſicorum, & ipſius naturæ dictatum: quod tamen ſic γραμμικῶς demonſtrabitur. Sit A B minima linea, & C D maior vtcunq; ſumpta, quæ ex hypotheſi aduerſarij non menſuretur ab A B minimâ. Sumatur A B toties in C D, vicies quippe aut tricies, quoad peruentum ſit ad F proximam diuiſionem τῷ D, puncto. Quod ſupereſt, F D ſcilicet vel erit æqualis τῇ A B; & habetur propoſitum,

positum, AB scilicet, mensurare τὴν CD, contra hypothesim aduersarij. Sin FD minor quàm AB, sumatur FG τῇ AB æqualis. Erunt ergo duæ lineæ FD, DG minores minimâ AB, quod est absurdum. Ergo vera maior propositio, minimum mensurare omnia in eodem genere. Iam de minore: nihil mensurare omnia in eodem genere. Si aliquid mensurat omnia in eodem genere, sequetur aliud absurdum, scilicet omnes quantitates continuas homogeneas esse commensurabiles, à minima scilicet lineâ mensurabiles secũdum maiorem aut minorem numerũ. Concidet itaq; tota illa τῶν ἀλόγων καὶ ἀσυμμέτρων in decimo Euclidis doctrina, quæ, sublata diuisione continui in semper diuidua, stare non potest. Neq; ampliùs verum erit illud apud Aristotelem toties iactatum; In quadrato diametrum esse incommensurabilem costæ siue lateri. Se enim mutuò cõsequuntur, ὅπου ἐπ' ἄπειρον ἡ διαίρεσις, ἐκεῖ καὶ τὸ ἄλογον & ὅπου τὸ ἄλογον, ἐκεῖ ἐπ' ἄπειρον ἡ διαίρεσις: vbi diuisio in infinitum, ibi reperitur irrationale; & vbi irrationale, ibi reperitur diuisio in in-

finitum ; vt rectiſſimè ſcripſerit Ariſtoteles primo de cœlo, eum qui minimum aliquid inducat in magnitudinibus, maxima convellere Mathematicorum fundamenta. Sed nihil eſſe in magnitudine minimum poteſt & aliter pingui Minerva demonſtrari. Sit

linea A B per dichotomiam perpetuam diviſa, quoad peruentum ſit, ſi fieri poteſt, ad minimum, & nõ ampliùs diviſibile. Quòd ſi poteſt linea AB per διχοτομίαν, toties dividi, vt perveniatur ad minimum, poteſt etiam in eadem lineâ BA idem fieri per τειχοτομίαν, niſi ſi natura in gratiam Ramiſtarum δίχα τέμνουσα, bifariam ſecans, hoc efficiat, τρίχα τέμνουσα, trifariam ſecans non poſſit: quod eſt ſortiri, quid loquare. Si verò tam trifaria quàm bifaria ſectione poſſumus pervenire ad punctum, vel aliquid in linea minimum, perveniatur in διχοτομίᾳ lineæ BA ad minimum in puncto C: & in τειχοτομίᾳ lineæ AB, ejuſdem nimirùm lineæ, in puncto D. erit autẽ AC pars lineæ AB, denominata à numero pari, imò pariter pari; & DB, pars ejuſdem lineæ A B denominata à numero impari, imò impariter impari, & proinde

inde inæqualis necessariò AC lineæ, quæ à pari denominatur, & vtraq; minima linea vel punctum. Ergo punctum puncto, minimum minimo majus erit & minus; quod est absurdissimum. Hujus rei siqui studiosi adolescentes vlteriorem explicationem requirant, consulant libellum Aristotelis περὶ ἀτόμων γραμμῶν, de lineis insecabilibus: in quem est etiam Pachymerij non inerudita paraphrasis, quæ, me juvene, habita est pro germano ipsius Aristotelis libro. Quomodo ergo punctum principiũ lineæ dicatur, cùm neq; ex punctis linea constet, nec in puncta dissoluatur? Non aliter sanè, quàm quatenus ex imaginario fluxu puncti intellectu concipitur generatio lineæ, quomodo ῥεύσει & motu rectæ lineæ circa punctum in ipsa fixum in eodem plano designatur circulus: & motu seu περιφορᾷ semicirculi circa manentem diametrum figuratur sphæra: & sic sphærã definivit Euclides ipse in vndecimo. Quatenus ergo punctum ῥυϊσκόμενον τῇ ἑαυτοῦ ῥεύσει ποιεῖ γραμμὴν, fluxu suo signat lineam, dicitur principium, minùs propriâ, quod fatendum est, principij significatione; cùm

prin-

principia propriè dicta, μήτε ἐξ ἀλλήλων εἶναι πέφυκε, μήτε ἐξ ἄλλων, ἐκ τούτων δὲ πάντα neq; ex se invicem fieri queant, neq; ex alijs, sed ex illis omnia; quod hîc non fit. Cùm ergo punctum tale sit, quale descripsimus, minimæ certè entitatis, & cogitatione solùm cõprehensibile, iniquè mihi facere videntur, qui punctum sibi ostendi quærunt in rerum naturâ subsistens, cùm nec linea quidem sine latitudine, vel superficies sine profunditate vspiam gentium extet. Respondeo tamen & in mundo centrum & polos esse realia, & sphæram super planum impositam, subjectũ planum in puncto contingere, vt est à Theodosio demonstratum 3° primi sphæricorum, & cujuscunq; rectæ lineæ finitæ terminos esse puncta realia, ita tamen, vt separata & secreta à terminatis, vt dixi, nusquam existant. Iam puncti alij alias tradiderunt definitiones. Cicero in Academicis, Punctum est, quod nullam magnitudinem habet, quæ definitio coincidit cum Euclideâ. Apud Aristotelem 6° Topicorum à quibusdam punctum definitur terminus lineæ: malè, vt à posterioti. Pythagoreis Punctum defini-

tur

tur vnitas adſumens ſitum. Vitioſè, cùm manifeſtus ſit tranſitus à genere ad genus: quod eſt in definitione vitioſum. Perinde ac ſi quis contrà, vnitatem definiret eſſe punctum ſitus expers. Nam quod de ſitu adjiciunt, libens amplector, vt quod ad explicandam naturam puncti non incommodum ſit. Ariſtoteles in Categorijs quantitates dividit in quantitates ſitum non habentes, & habentes. Habentes, vt eſt linea, ſuperficies, corpus. Situm habentium tria ſunt χαρακτηριστικὰ apud Ammonium: primum, τὸ κεῖσθαι πῦ, ἄνω, κάτω, poſita eſſe alicubi, ſurſum, deorſum, &c. Secundum τὸ δεικτικὰ εἶναι δακτύλῳ, digito poſſe monſtrari: Tertium, τὸ συνεχῆ κότα ἔχειν τὰ μόρια, τινές, ἅμα ὅλα ὑφεστηκότα, id eſt, partes habere cohærentes, hoc eſt, ſimul totas ſubſiſtentes. Non habentes ſitum, vt numerus & tempus. Hîc nulla mentio puncti, vtpote non quanti, quod tamen vel maximè ſitum habet. Et certè Euclides in libro Datorum, cùm alia ponat magnitudine data, alia ratione, alia ſpecie, punctum ſolo ſitu dari ponit; vt non aberret fortaſſe meo judicio, qui punctum definierit eſſe ſitum

indiviſibilem, vel potius notam ſitus indiviſibilis. Sed nihil innovo. Supereſt vt inquiramus quis ſit ſenſus verborum Platonis decimo de Republica, Punctorum ὑπόϛασιν, id eſt, ſubſiſtentiam, Adamantinam eſſe aſſerentis. Proclus ideo dictam putat, vt immutabilem eorum eſſentiæ vim, & æternam & ſtabilem, quæq; eodem ſemper modo ſeſe habet, oſtenderet: Aut fortaſſe ludens, vt ſolet Plato, Adamantinam dixit eorum eſſe ſubſiſtentiam, quòd vt Adamas frangi non poteſt in partes propter materiæ duritiem; ita neq; punctum propter impartibilitatem naturæ. Atq; hæc de re minima nimis fortaſſe multa cuipiam dicta videantur.

LEC-

LECTVRA. IV.

IGnoſcite mihi, Viri graviſſimi, auditores non de grege meo, dum tironibus, hoc eſt, legitimis auditoribus, hæc levicula trado, & omnia quaſi minima manſa, vt aiunt, in os inſero. Scio hæc non eſſe Veſtri ſtomachi, néq; ſanè vobis, aut veſtri ordinis hominibus apparata eſt hæc menſa, ſed novitijs artium & philoſophiæ alumnis.

Sed ſi tantus amor puras cognoſcere nugas, aggrediar.---- A puncto, quod nullam habet dimenſionem, nullo conſtat intervallo, tranſit ad lineam, vnica contentam dimenſione, nempe longitudine: quam ita definit.

Γραμμὴ ἐστι, &c: Linea eſt lõgitudo latitudinis expers. Hanc definitionem, meo judicio valdè probabilem, reprehendit tamen Ariſtote- *Definitio. 2ª*

les 6° Top. disertis verbis, vt quæ per negationem, vt ait, dividat genus. Quî magis, quæso, quàm siquis brutum definiat esse ζῶον ἄλογον, animal rationis expers? ἀπλατὲς, ἄλογον, quid similius? Irrationale, illatabile. Omnes certè exceptiones; quas contra definitionem lineæ affert Aristoteles, huic defitioni bruti in scholis adeò receptæ quadrant. Atq; in hac est sententia Alexander, qui ad eum locum sic adscripsit. Ἔστι δ' ὅπως ὁ τόπος τὸ ὅλον σοφιστικός: est hic locus in vniversum sophisticus, nihil sc: habens solidi &c. severè satis de magistro discipulus. Neq; sanè sola negatione constat hæc definitio, vt superior puncti; quùm genus habeat positivum, longitudo. Alij lineam definiunt ῥεῦσιν σημείου, fluxum puncti, alij quantitatem vnicam habentem dimensionem, verè vtiq; sed ad naturam lineæ explicandam non tam accommodatè; vt taceam minùs Eucli deâ has esse perspicuas, Aristotel. lib. quo suprà, aliam adducit definitionem, auctoris nescio cujus, lineam esse superficiei terminum, absurdam satis, vt quæ à posteriori, quod prius est, declaret. Porrò lineę notionem habemus

inquit

inquit Apollonius apud Proclum, cùm longitudines viarum metiri volumus. Non enim tum latitudinem vel crassitiem coassumimus, sed vnicam tantùm dimensionem consideramus, quemadmodum & cùm agros metimur, superficiem solam sine crassitie spectamus. Sensum verò ipsius lineæ habebimus, inquit, in discriminatione locorum illustratorum ab opacis. Hoc enim quod medium est inter lucem & vmbram, dimensionem juxta latitudinem non habet, sed tantùm longitudinem habet, luci & vmbræ coextensam.

Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα. Lineæ verò fines, puncta. Duo sunt apud Euclidem verba affinis significationis, sed non planè ejusdem: πέρας, & ὅρος. Ex decima tertia definitione apparet voluisse Euclidem omnem ὅρον esse πέρας, sed non omne πέρας esse ὅρον, quod vel ex hac definitione liquet, vbi linea ponitur habere πέρατα, quæ tamen ὅρους habere nusquam, quod sciam, dicitur. Vbi magister distinguit, neq; nos pœnitebit distinguere, & πέρας vertere finem; ὅρον, terminum. Lineæ ergo fines (inquit in hac tertia definitione Euclides) puncta. Quid ergo di- *Definitio 3.*

cemus de lineâ, vna tantùm ex parte finitâ, & ex altera infinitâ? Cujus generis lineæ vſus eſt in conſtructione viceſimæ ſecundæ hujus. Exponatur, inquit Euclides, linea recta D E, finita quidem ad D, infinita verò verſus E. Aut de linea A B in 12ª hujus, quæ vtrâq; ex parte infinita ſupponitur? Quid de circumferentia circuli vel Ellipſi integris, quæ magnitudines quidem ſunt finitæ, ſed tamen nullos habent actu fines, ſed potentia tantum? Idem de Clypeari linea, θυρεαίᾳ; & Hederacea κιττοειδῆ, de quibus infrà dicendum. Sic nimirum ſolet Euclides, quàm rectè, docti viderint, poſita ſemel definitione alicujus generis, ſine vlla diuiſione tranſire ad definitionem alicujus ex præcipuis ſpeciebus, quòd reliquæ fortaſſe propoſito ſuo minùs inſeruirent, aut elementari inſtitutioni non eſſent accommodatæ. Sic hoc loco, cùm poſitâ definitione lineæ, conſequens eſſet, vt lineam diuideret in finitam & infinitam, omiſſa infinita, finitam ſolummodò in hac tertia definitione attingit. Sic in 4ª definitione, omiſſa omnium linearum non rectarum mentione, quæ plurimę ſunt, & non-

nullæ

nullæ magnæ ſpeculationis, ad lineam rectam ſolùm definiendam ſe accingit. Sic in definitione octaua, cùm priùs angulum oportuiſſet diuidere in planum & non planum; & in 9ª cum angulū planum in rectilineum & non rectilineum, ille vtraq; omiſſa, ad ea definienda quæ propoſito ſuo inſervirent, properat, neglectis omnibus diuiſionibus. Nos itaque quod Euclidi deeſſe querimur, ſupplentes, lineæ quatuor diviſiones afferemus. Prima, vt linearum alia ſit magnitudine finita, alia infinita. Et infinita, vel ſimplicitèr & in vtramq; partem, vt linea in 12ª hujus; vel ex vna parte tantùm, vt linea cujus eſt vſus in 22ª hujus. Eſtq; hæc diviſio generis in accidentia. Accidit enim lineæ vt ſit finita, vel infinita. Neque lineæ ſolùm tam infinitæ ſunt quàm finitæ, ſed omnes, ſi quid ego video, quantitates, quatenus merè quanta, ſunt infinitæ. Sic in ſecunda definitione linea definitur ab Euclide, ſic ſuperficies in quinta, ſic ſolidum in prima definitione xi libri, vt non terminata, neq; clauſa. Sic cùm duæ rectæ dicuntur eſſe in eodem plano, planum intelligitur quaquà

quà verſum extenſum in infinitum. Quatenus enim ſuperficies aut corpus clauditur & figuram efficit, hoc habet à qualitate, non à quantitate: rectéq; ſine dubio Dialectici Trigonum, Tetragonum, cubum, Cylindrum, & omnes omninò quantitates figuratas, quatenus figuratæ, in prædicamento qualitatis reponunt, in quarta ſpecie: quamvis τὸ περιγραμμικὸν & materia, vt ita dicam, harum figurarum ſit quantitas. Ariſtoteles poſt convulſum & ſolidiſſimis argumentis exterminatum è finibus naturæ infinitum mole & quantitate, quod tamen veteres ferè omnes ſtabiliviſſent, cùm cerneret hoc ſuum decretum, ſpecie tenus ſaltem, hoc ſolenni apud Mathematicos infiniti vſu quadam ex parte labefactatum iri, arbitraretur q; hominis eſſe eruditi (vt ait eruditus interpres Simplicius) ne quid per ſuas novitates deſtrueret earum rerum, quæ apud homines ſapientes in pretio eſſent & honore, qualis cum primis illis temporibus fuit Geometria, vir cæteroqui, vt ſcitis, intrepidus ad ſubruenda omnia veterum fundamenta, à mathematicis tamen abſtinuit manum, & artium

nobiliſſimarum majeſtati faſces ſubmiſit, maluitq; hoc loco ingeniosâ diſtinctione vim argumenti elidere, quàm aperto marte congredi, divinamq; Matheſin vel verbo violare: quod quidem egregiè præſtitit. Verba ſunt 3° Phyſ. cap. penultimo: Non aufert vtiq; neq; Mathematicam contemplationem hæc noſtra de infinito diſputatio, quæ infinitum actu, & quod pertranſiri nequit, è medio tollit. Neque enim Mathematicos opus habere infinito, neque vti eo, niſi ſolùm vt finiti quantum opus eſt ſuppetat: acutè & eruditè, vt nihil ſuprà. Id quod oſtendet, ſi ipſi viſum fuerit, profeſſor meus ad duodecimum hujus. Neque enim eovſque noſtra pertinget induſtria. Iam tempus eſt ad lineam magnitudine finitam redire: quæ duplex eſt. Vel enim non habet vllos fines actu, ſed potentia tantùm, vt integra circumferentia circuli, integra ellipſis, & aliæ in ſe redeuntes, & per ſe ſolæ claudentes figuram: vel habet fines actu, vt recta linea vtrinque finita, pars circumferentiæ aut ellipſeos deſecta à toto, & aliæ id genus. Atq; de hoc poſtremo genere tantùm vera eſt hæc ter-

tia definitio, lineæ autem fines, puncta.

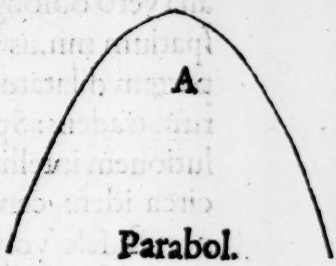
Hactenus de diuisione lineæ in finitam & infinitam, quæ est, vt dixi, generis in accidentia: sequuntur tres aliæ ex optimis sumptæ auctoribus, Gemino, & Proclo, non quidem generis in accidentia, sed generis in species. Prima diuisio est in rectam & obliquam siue curvam; secunda in simplicem & mixtam; tertia in ὁμοιομερῆ, & ἀνομοιομερῆ. i. lineam similarium partium, & partium dissimilarium. Quod ad primum modum attinet, punctum in directum ῥυὲν κόμβον, fluens, lineam rectam generat; εἰς τὰ πλάγια & ad latera obliquam siue curvam. Quod ad secundum, linea omnis simplex, vel est absolutè recta, vt quæ ex æquali suis interjicitur punctis: vel absolutè rotunda, qualis est sola circumferentia: ad mixtum genus reliquæ omnes pertinent. Recta est simplex & vniusmodi, adeóq; omnium linearum, meo judicio, pace Aristotelis dictum esto, simpliciſſima, quia quælibet recta cuilibet rectæ lineæ ἐφαρμόζει. i. ita applicari potest, vt congruat, quod in peripherijs non fit, nisi sint peripheriæ æqualium circulorum, multoq; minùs

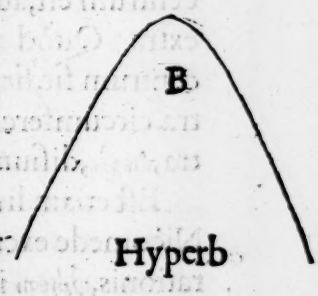
in

in alijs lineis, quarum vt numerus poteſt eſſe infinitus pro infinita varietate ῥύσεως puncti ὅπερ τὰ πλάγια, ita vſus in libris hiſce elementorum, & hac στοιχειώδικῇ, elementari doctrinâ, perexiguus: quæ tamen in reliqua Geometria vſum ſuum habent. Nos ergò in gratiam tironum hujus artis præcipuas quaſq; commemorabimus, præmiſſa tamen ex Gemino linearum mixtarum diviſione. Mixtæ, inquit ille, aliæ ſunt κατὰ ϛύνθεσιν, hoc eſt, per compoſitionem & aggregationem ſiue additionem, vt quæ partem habet rectam, partem circularem: Aliæ κατὰ σύγχυσιν per confuſionem vt Helix Archimedea, quæ cum oriatur ex duplici motu puncti, vno in recta linea, alio in circulum, quocunque modo ſecetur, nullam vel minimam portionem habet vel rectam vel περιφερῆ: quod ſtultiſſimè opinatus eſt Ioſephus Scaliger 1ª prop: ſuæ κυκλομετρικῆς, Helicen ſcilicet ſive volutam conſtare ex ſedecim circulorum peripherijs, homo omnium mortalium, ne Orontio quidem excepto, ἀγεωμετρητότατος. Inter mixtas autem nobiliſſimæ ſunt illæ tres Conicæ ſectiones à Menæch-

mo juventæ. Sciant enim ſtudioſi adoleſcentes tres eſſe ſpecies ſectionum. Vel enim linea lineam ſecat, vel ſuperficies ſuperficiem, vel corpus ſecabit corpus. Cujus tamen generis, tertij dico, vel nullus eſt, vel perexiguus vſus in Mathematicis, vt neq; penetrationis corporum in naturalibus. Iam linea ſecans lineam, communem ſectionem habet punctum vel puncta. Si recta rectam ſecat, communis ſectio erit punctum. Si recta peripheriam, vel peripheria peripheriam, duo ſunt puncta communia. Porrò ſuperficies ſecans ſuperficiem, ſi vtraq; plana fuerit, communis ſectio eſt recta linea, vt in xi° libro demonſtrabitur. Si planum ſecat ſphæricam ſuperficiem, quocunq; modo ſecetur, communis ſectio erit peripheria circuli, vti à Theodoſio demonſtratum eſt in 1° libro. Si planum ſecet ſuperficiem Cylindricam, communis ſectio vel erit circulus, cum nimirum planum ſecans eſt parallelum baſi, vel Ellipſis, cum non eſt parallelum, vel parallelogrammum, vti à Sereno demonſtratum eſt. In conica vero ſuperficie per planum ſectâ, major eſt varietas & ſpeculatio ſubtilior.

or. Vel enim triangulum fit, vt in sectione per verticem coni, aut circulus, vt in sectione parallelâ basi, & sectione subcontrariâ in cono scaleno. Sin neutro horum modorum, fiunt Parabole, & Hyperbole, vtraq; suapte naturâ infinita, & Ellipsis finita, vt supra dixi, & in se rediens: vt in figuris A. B. C. generationem & symptomata docebunt rerum Conicarum scriptores. Sunt etiam aliæ tres sectiones σπειρικὰ à Perseo excogitatæ, quarum γνώσιν tradiderat Geminus, sed liber non extat. De quibus hæc pauca apud Proclum pag. 31. & 33. extant, sed quæ plenam harum generationi lucem afferre, vix est vt possint.

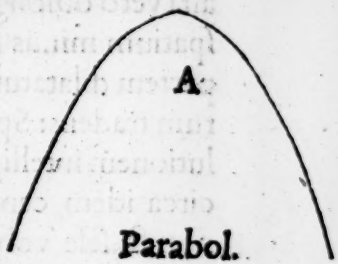


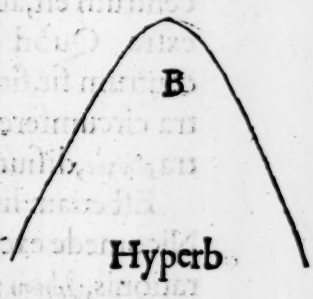


Spiricarum sectionum, inquit, alia quidem implicata, involutaq; est, equinæ similis pedicæ: alia autem in medio dilatatur, ex vtrâq; verò parte deficit:

mo juventæ. Sciant enim ſtudioſi adoleſcentes tres eſſe ſpecies ſectionum. Vel enim linea lineam ſecat, vel ſuperficies ſuperficiem, vel corpus ſecabit corpus. Cujus tamen generis, tertij dico, vel nullus eſt, vel perexiguus vſus in Mathematicis, vt neq; penetrationis corporum in naturalibus. Iam linea ſecans lineam, communem ſectionem habet punctum vel puncta. Si recta rectam ſecat, communis ſectio erit punctum. Si recta peripheriam, vel peripheria peripheriam, duo ſunt puncta communia. Porrò ſuperficies ſecans ſuperficiem, ſi vtraq; plana fuerit, communis ſectio eſt recta linea, vt in XI° libro demonſtrabitur. Si planum ſecat ſphæricam ſuperficiem, quocunq; modo ſecetur, communis ſectio erit peripheria circuli, vti à Theodoſio demonſtratum eſt in 1° libro. Si planum ſecet ſuperficiem Cylindricam, communis ſectio vel erit circulus, cum nimirum planum ſecans eſt parallelum baſi, vel Ellipſis, cum non eſt parallelum, vel parallelogrammum, vti à Sereno demonſtratum eſt. In conica vero ſuperficie per planum ſectâ, major eſt varietas & ſpeculatio ſubtilior.

or. Vel enim triangulum fit, vt in sectione per verticem coni, aut circulus, vt in sectione parallelâ basi, & sectione subcontrariâ in cono scaleno. Sin neutro horum modorum, fiunt Parabole, & Hyperbole, vtraq; suapte naturâ infinita, & Ellipsis finita, vt supra dixi, & in se rediens: vt in figuris A. B. C. generationem & symptomata docebunt rerum Conicarum scriptores. Sunt etiam aliæ tres sectiones [illegible] à Perseo excogitatæ, quarum [illegible] tradiderat Geminus, sed liber non extat. De quibus hæc pauca apud Proclum pag. 31. & 33. extant, sed quæ plenam harum generationi lucem afferre, vix est vt possint.





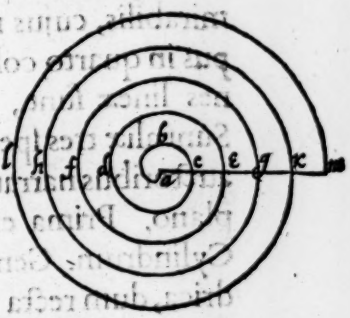
Spiricarum sectionum, inquit, alia quidem implicata, involutaq; est, equinæ similis pedicæ: alia autem in medio dilatatur, ex vtrâq; verò parte deficit:

alia verò oblonga exiſtens medium quidem ſpatium minus habet, ad vtramq; autem partem dilatatur. Et alibi, generationem earum tradens: Spira, inquit, per circuli revolutionem intelligitur, erecti permanentis, & circa idem centrum, quod ejus centrum non ſit, ſeſe volventis. Quocirca triplicitèr quoq; ſpira fit. Aut enim in circumferentia centrum eſt, aut intra circumferentiam, aut extra. Quòd ſi in circumferentia quidem centrum ſit, fit ſpira continua: ſi autem intra circumferentiam, implicata: ſi verò extra, διεχὴς, diſiuncta. Hæc de ſpiricis Proclus.

Eſt etiam linea κογχοειδὴς, conchiliata, à Nicomede excogitata, cujus modum generationis, γλύφειν ipſam, vide apud Pappum libro 4° Mathematicarum collectionum, & Eutocium in 2^m librum Archimedis de ſphæra & Cylindro. Meminit etiam Geminus, eſtq; vna ex linois ſuapte naturâ infinitis. γλύφειν autem ipſam ſcitè & organicè explicabit ſucceſſor meus ad prę fatum Archimedis librum.

Quartum genus, Helix in plano, ſpiralem vocamus aut volutam, in quam liber eſt ſingularis

gularis ingeniosissimi Archimedis, ejus generationem & Symptomata perspicuè declarans. Figuram hic videtis: generatio verò talis. Si recta linea. A M in plano altero fine A. manente æquabilitèr circumlata ab M, restituatur rursus in eum locũ, vndè incepit; simul verò cum recta ita circumlatâ moveatur punctum aliquod æquabilitèr ipsum sibi ipsi incipiens à manente fine A, punctũ illud describet in planò Helicam, volutam sive spiralem: in 1ª circumvolutione A B C. in secunda C D E. in tertia E F G. in quarta G H K. in quinta K L M.



Quintum, πλεγωνίζουσα, quadratrix, cujus γένεσιν vide apud Pappum lib. 4° Collectionum. Sextum genus κισσοειδής, Hederiformis: cuius γένεσιν descripserat Geminus, sed liber non extat. Neq; aliundè γένεσιν ejus elicio, nisi quod ex genere τῶν ἑαυτῆς συνπτώσεων, & figuram claudentiũ fuisse ex Proclo apparet.

Septimum genus ἡ θυρεοειδής, Clypearis linea,

nea, quæ item ex genere eſt figuram claudentium. Sed γένεσιν eius nuſquam reperio: Vt neq; lineæ octavi generis paradoxæ, admirabilis, cujus meminit ex Menelao Pappus in quarto collectionum. Atq; hæ omnes lineæ ſunt, vt puto, in eodem plano. Sunt aliæ tres ſpecies Helicis, ſiue volutæ, ab auctoribus narratæ, quæ non ſunt in eodem plano. Prima eſt Helix ſiue voluta circa Cylindrum. Generatur autem Helix Cylindrica, dum recta linea circa Cylindri axem 1. rectam lineam connectentem centra baſium Cylindri, æquabili motu, ἰσοταχῶς αὐτὴ ἑαυτῇ, movetur; punctum verò in ipſa rectâ motu ſimiliter æquabili ἰσοταχῶς αὐτὸ ἑαυτῷ fertur. Inſtrumentum mechanicum, vernaculè a Screw Helix eſt circa Cylindrum. Alterius Helicis circa conum, & tertiæ cujuſdam Helicis circa ſphæram meminerunt auctores, quarum generationes non eſt difficile ex ſuperiori circa Cylindrum reperire.

Sequitur tertia diviſio in lineas ὁμοιομερεῖς, id eſt ſimiliarium partium, & lineas ἀνομοιομερεῖς, diſſimilium partium. Homœomeres, quæ poſſunt inter ſe adaptari, vt congruant,

gruant, quales ſunt omnes rectæ lineæ in vniuerſum, omnes peripheriæ eorundem aut æqualium circulorum, non aliæ; omnes Helices circa eundem aut æquales Cylindros ἰσοπλαγεῖς deſcriptæ. Anomœomeres, præter has tres, reliquæ omnes.

Iam ad definitionem Euclideam lineæ rectæ tranſeamus. Εὐθεῖα γραμμὴ &c. Linea recta eſt, quæ ex æquo (ſiue æquali) ſuis punctis jacet (ſita, poſita eſt.) Hanc definitionem mihi liceat bona cum venia omnium interpretum tam veterum quàm recentiorum non intelligere. Adeò rem maximè perſpicuam perſpicuè definire aliquando difficile eſt. Proclus, quem cætera ferè interpretum cohors ſequitur, talem reddit horum verborum ſenſum. Oſtendit Euclides (inquit) per hanc definitionem, ſolam rectam lineam æquale occupare ſpatium ei, quod inter ſua interjacet puncta. Quanta enim eſt alterius punctorum ab altero diſtantia, tanta eſt rectæ, quæ ab ipſis terminatur, lineæ magnitudo. Atq; hoc eſt, inquit Proclus, ex æquali inter ſua collocari puncta. * Putabam aliquando verborum

Definitio 4.

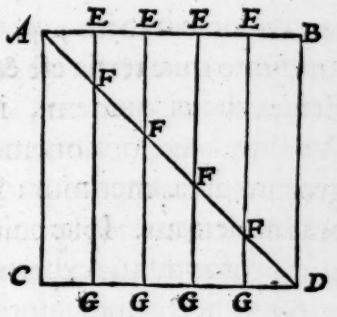
* *Ad hanc interpretationem Procli videtur mihi Candalla reſpicere in demonſtratione ſua paralogiſtica quartæ huius, vt ibi videbitis.*

Græcorum hunc ſenſum eſſe potuiſſe, vt recta ſit, in qua nullum ſubſultet punctum, nullum ſubſidat: Sed neſcio. Ex veteribus alij alitèr definiêrunt. Archimedes primo de ſphæra & Cylindro, recta eſt, inquit, minima linea omnium linearum, quæ eoſdem habeant fines: etſi Archimedi non eſt definitio, ſed λαμβανόμενόν τι, vel poſtulatum. Idem eſt enim penè ſenſu cum propoſitione 20ª huius. Nam qui dicit rectam lineam eſſe minimam omnium eoſdem fines habentium, dicit omnis trianguli duo latera majora eſſe tertio, quomodocunq; ſumantur. Id quod eſt ab Euclide eo in loco legitimâ demonſtratione probatum. Nec obſtat, quod Epicuréi objiciant, hanc propoſitionem vel Aſino notam eſſe. Nam ſi fœnum, inquiunt, poſitum ſit in altero laterum extremo, Aſinus pabulum expetens vnum latus peragrabit, non duo: digni ipſi, qui cum Aſino fœnum eſſent. Habet enim illa propoſitio magnos & neceſſarios vſus in tertio Elementorum, & in Aſtronomiâ.

Alia eſt apud Proclum definitio rectæ lineæ, vt ſit, quæ in extremitatibus extenſa eſt,

eſt, ἡ ἐπ' ἄκρων τεταμένη (ita enim puto legendum, non τεταγμένη) quam definitionem ex æquo non intelligo. Alij, cujus pars non eſt in ſubiecto plano, pars in ſublimi; quæ definitio coincidit cum propoſitione primâ xj. lib. Alij ſic; Recta linea eſt, cujus omnes partes omnibus congruunt, de quo ſuprà. Alij, quæ finibus manentibus etiam ipſa manet. Alij, quæ cum ſimili ſibi ſpecie figuram non claudit. Quæ omnia propriæ ſunt paſſiones rectæ lineæ, nec omnes 4° modo propriæ: naturã verò minimè explicant. Plato rectã lineã definiuit, cujus media ἐπιπροσθεῖ, officiunt extremis, ludens in Metaphora, vt Eclipſim ſolis dicunt Aſtrologi tum fieri, cum ſol & luna, & noſter oculus in vna fuerint rectâ lineâ.

Atq; hæc de recta linea; quæ cùm ſit, vt eſt, ſimpliciſſima, poteſt tamen generari. vel ex duobus motibus rectis compoſitis, vt in quadrato A D, mota E G re-



Idem fit ſi ABCD quadrilaterum ſit vtcunq; parallelogrammum, obſervatis debitis cautionibus.

cta æquidiſtanter lateri A C, & puncto E moto in E G ἰσοταχῶς, æquali celeritate vſq; ad F, generatur diameter AD: vel ex duobus motibus circularibus, vt apud Copernicum lib. 3. ca. 4. cujus rei explicationem ab Aſtronomiæ profeſſore ſuo loco expectate. Rectiſſimè ergò elegantiſſimus Geminus ex pluribus ſimplicium linearum motibus, aliquam produci poſſe lineam conceſſit, neque tamen eam neceſſariò mixtam eſſe.

Definitio 5. Ἐπιφάνεια, ſuperficies eſt, quod longitudinem & latitudinem tantùm habet. Hæc definitio ſuperficiei (vt ſuprà lineæ) partìm καταφατικῶς, hoc eſt poſitivè & affirmativè tradita eſt, partìm ἀποφατικῶς. .i. Negativè. Nam vocabulum, tantùm, vna eſt ex Syncategorematicis particulis, quæ incluſam in ſe negationem habent; quaſi diceret, ſine profunditate, quæ tertia eſt & vltima dimenſio. Et ſuperficiei quidem, inquit doctiſſimus Proclus, ἔννοιαν, notionem habemus cùm agrorum areas metimur: Senſum, cùm vmbras aſpicimus. Ipſæ enim omnis penitùs ſunt profunditatis expertes.

Definitio 6. Superficiei fines ſunt lineæ. Quod ſu-

perius

periùs ad tertiam definitionem diximus, idem & hic analogicè resumendum: neque superficiei infinitæ fines esse lineas, vt quæ nullos omninò habeat fines: neq; etiam omnis finitę, cum superficies Sphęrica sit quidē magnitudine finita superficies, neq; tamen à lineis finita, sed ipsa à seipsa; & sic de superficie sphæroide, & alijs. Circulus etiam, superficies elliptica, & aliæ non habent fines, sed finem. Euclides etiam hic suo more omittit diuisionem superficiei, quam nos pro nostro captu supplebimus. Superficies ergò, omissâ diuisione in finitam & infinitam, diuiditur (vt superiùs linea) in simplicem & mixtam. Simplex in planam & globosam. Mixtæ sunt superficies Cylindrica, Conica, Sphæroidica, & aliæ numero infinitæ. Mixtarum superficierum aliæ sunt, vt in lineis suprà diximus, κατὰ συνθεσιν per aggregationem, aliæ κατὰ σύγχυσιν, per confusionem. Tertius est insuper modus mixtarum superficierum proprius κατὰ κρᾶσιν, quæ per temperationem mixtæ sunt, vt corpora naturalia ex elementis, aut ex materia & forma, quæ sectæ aliquo modo resolvuntur in sua prin-

cipia. Sic Conica ſuperficies ſecta per axem repreſentat figuram eam ex qua ortum habuit, nempe Triangulum, & Cylindrica ſimiliter ſecta parallelogrammum, & alio modo ſectæ circulos. Porrò obſeruandum vt in lineis, quod ſuprà adnotauimus, non plures eſſe ὁμοιομερεῖς quàm tres, ſcil: rectam, circularem, & Helicem circa Cylindrum, ſic neq; in ſuperficiebus plures eſſe ὁμοιομερεῖς, quàm tres, planam ſc: Sphæricam ſiue Globoſam, & Cylindricam. Nam conica, & cæteræ nullo modo ὁμοιομερεῖς. Neq; enim omnes partes omnibus inter ſe partibus congruere poſſunt quæ conditio ad ὁμοιομέρειαν concludendam requiritur.

Iam ad Euclideam definitionem ſuperficiei planæ tranſeamus. Ἐπίπεδός ἐστιφάνεια, Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquo jacet ſuis, ijs quæ in ſe ſunt, rectis lineis. Obſeruent ſtudioſi adoleſcentes Platonem ferè vbiq; & Ariſtotelem aliquando, vti vocabulo ἐπίπεδον (quæ ſpecies eſt apud Euclidē & omnes poſteriores) pro ἐπιφάνεια quod genus eſt Sic primo de cœlo τὸ ἐπὶ δύο διαρετὸν μέγεθος, ἐπίπεδον, quæ tamen definitio non ἐπιπέδῳ primum,

definitio 7.

mùm, ſed ὑπιφανεία competit. Quamvis idem Ariſtoteles in Categorijs & 5° Metaphyſicorum, Euclideo more, ſecundam ſpeciem quantorum continuorum ponat ὑπιφάνιαν: quam tamen proximis verbis in Categorijs cum βαθει confundere videtur, quod junioribus notaſſe non erit inutile. Planum ſeu planam ſuperficiem definit Euclides quadam ad rectam lineam proportione: Recta linea, quæ ex æquo ſuis interjacet punctis, & plana ſuperficies, quæ ex æquo ſuis interjacet rectis; quam definitionem ex æquo non intelligo. Neq; juvat Proclus, qui eâdem analogiâ interpretatur definitionem plani & rectæ lineæ, qua ſunt definitæ: Rectam, ſc. æqualem eſſe interuallo inter ſua puncta, & planum æquale intervallo ſuarum rectarum: non quidem obſcurum per obſcurius, ſed planum & perſpicuum per meras tenebras. Niſi ſi quis ita intelligat, vt de recta linea ſuprà diximus, ſuperficiem planam eſſe, in qua nihil emineat, nihil ſubſidat; ſed omnia ex æquo jaceant. Iam plani aliæ adferuntur definitiones, analogæ ferè omnes alijs definitionibus rectæ: alij ſuperficiem

ficiem ἐπ' ἄκρῳ τελειώσῃ, quam perinde non intelligo: alij breviſſimam omnium ſuperficierum eoſdem fines habentium: alij, cujus omnibus partibus recta congruit: alij, cujus media officiunt extremis. Quod ad diviſionem Plani attinet, Plana comprehenduntur (nam de finitis nobis omnis hic ſermo) vel à lineis ſimplicibus, vel mixtis, vel vtriſq; ſimul. Et à ſimplicibus; vel ejuſdem ſpeciei, vel diverſarum ſpecierum. Ejuſdem ſpeciei vel ſc. à circularibus lineis, vel à rectis. à circularibus, vel vna vt circulus; vel duabus, ijſq; vel ſine angulo, vt in corona dicta, ſpacio ſc. quod inter duas peripherias concentricas continetur, vel angularis, vt Meniſco &c. vel pluribus circularibus; quorum numerus infinitus, & ad vſum Geometricum prorſus invtilis. Iam à rectis comprehenſæ, vt tribus, quatuor, pluribus, quales ſunt omnes figuræ rectilineæ. Atq; hactenus in diviſionibus luxuriatos eſſe Procli & Gemini φιλοκαλίαν ſequentes ſufficiat.

LEC-

LECTVRA. V.

IAM de angulis disseramus, quorum vsus in Geometria, reliquâq; Mathesi latissimè patet, eorumq; vis & natura omnibus rerum Mathematicarum studiosis penitùs pernoscenda. Angulus itaq; vt ab initio rem repetamus, oritur & generatur ex concursu vel linearum inter se, qui primus est modus, seu prima species Angulorum, & in Geometria pura, quatenus sc. στερεομετρίᾳ ἀντιδιαιρεῖται, opponitur, latissimi vsus; vel lineæ & plani, qui secundus est modus, & vsum habet permagnum in xi° libro: vel planorum inter se, qui tertius est modus Angulorum, & in tota στερεομετρίᾳ permaximi vsus. Nam de alijs superficiebus quam planis, nulla est in 2° & 3° modo Angulorum, in geometria, quod sciam, mentio, vt nec in

2° modo alterius, quàm lineæ rectæ. Porrò vt ab vltimo incipiam, ex concurſu Planorum inter ſe duo generantur Angulorum genera; Ex concurſu ſc. duorum Planorum & vocatur ab Euclide ille Angulus in xi° ἐπιπέδων πρὸς ἐπίπεδον κλίσις, Plani ad planum inclinatio: & ex concurſu plurium planorum quàm duorum ad idem punctum coëuntium, qui proprio & peculiari nomine ſolidus Angulus à Geometris nuncupatur. Secundus modus ſeu ſpecies Anguli, ex concurſu lineæ rectæ & plani ab Euclide in xi° εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις vocatur, Rectæ ad planum inclinatio. Supereſt primus modus, quando Anguli fiunt ex concurſu linearum, quorum duæ ſunt ſpecies, quæ à Geometris agnoſcuntur, nec, quod ſciam, plures. Vel enim generantur non in plano, ſed ex concurſu duarum peripheriarum maximorum circulorum in ſphæræ ſuperficie, qui anguli ſphærici dicuntur; quorum vſus eſt per magnus in Aſtronomicis & doctrinâ Triangulorum, de quibus extant tres egregij libri Menelai Geometræ: vel generantur ex concurſu linearum in eodem plano, de quibus

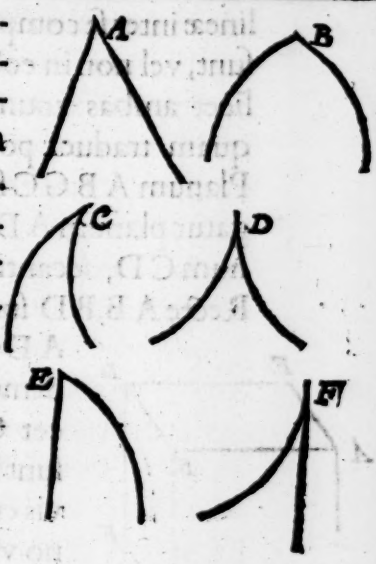
bus est proximè sequens definitio Euclidis.

Ἐπίπεδος γωνία &c. Planus angulus est duarum linearum in plano sese tangentium, & non in directum jacentium alterius ad alteram inclinatio. Contra quam definitionem objicio, eam videri competere duobus segmentis ejusdem peripheriæ, quæ se mutuò tangunt in plano, neq; ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι (nemo enim dixerit propriè loquendo duo segmenta ejusdem peripheriæ in directum, ἐπ' εὐθείας jacere, cùm nihil sit ibi εὐθύ, rectum) quem tamen concursum nemo vnquam veterum, nemo recentiorum angulum appellavit. Idem de duobus segmentis ellipseos objici potest. Aut dicendum ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι, non dici tantùm de lineis in rectum jacentibus, sed de qualibet lineâ, quæ eodem perpetuo tenore progreditur. Ita sectiones ejusdem peripheriæ non facere inter se angulum, quia eadem linea circularis sine vlla fractione, ἀνευ κλάσεως, procedit; in quem sensum non malè Clauius: Non in directum jacere lineæ dicuntur, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel *Definitio 8.*

certè ſtatìm poſt punctum concurſûs ab ea recedit, vt fit in angulo κερατοειδεῖ, cornicu-lari, contactus. An potiùs dicendum, vt circulum eſſe πολύγωνον laterum potentia in-finitorum, ſic circumferentiam angulos in ſe habere potentiâ infinitos? Secundò quæ-ro quomodo in recto angulo, vbi perpendi-cularis ἀκλινῶς. i. ſine vlla in alterutram par-tem inclinatione inſiſtit, κλίσις dicatur? Quomodo in obtuſo angulo, quæ averſatio eſt, & ἐφετεροκλισία (liceat mihi bona cum ve-nia ſic verbum novare) potiùs quàm alteri-us ad alteram κλίσις? præſertim cùm in de-finitione quinta & ſexta vndecimi, κλίσις tantum de acuto angulo dicatur. An κλίσις, inclinatio, pro qualicunq; concurrentium σχέσει πρὸς ἀλλήλας, alterius ad alteram habi-tudine accipitur? Iam de diviſione. Pla-nus ergò angulus vel fit ex concurſu dua-rum linearum rectarum, vt in angulo A, vel duarum circularium vt in angulis B,C,D, vel rectæ & circularis vt in E & F. Nam reliqui ex concurſu vtriuſvis harum cum mixtis aut irregularibus lineis, aut mixta-rum & irregularium inter ſe, extra artis

præ-

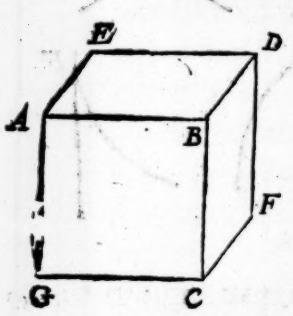
præceptiones ſunt. Anguli tertij generis ex concurſu rectæ ſcilicet & circularis vſus eſt ad decimam ſextam tertij hujus &c. Secundi generis non magnus in Geometria, & tamen aliquis apud Proclum ad quartum poſtulatum. Reſtat ergò ex omnibus angulis Planis angulus Rectilineus, cujus vſus omnium latiſſimè patet; quem ita definit Euclides.



Ὅταν δὲ αἱ &c. Quando autem quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, Rectilineus vocatur angulus. Et de hoc angulo ferè ſemper intelligamus loqui Euclidem reliquoſq; Geometras, quoties de angulo loquuntur ſine additione. *Definitio 9.*

Supra dictum eſt de linea recta, quatenus per ſe conſideratur, hoc eſt, non comparata ad aliam rectam. Iam de duabus rectis inter ſe comparatis agendi locus. Rectæ itaq;

lineæ inter ſe comparatæ, vel in eodem plano ſunt, vel non in eodem plano, per quas ſcilicet ambas vnum & idem planum nunquam traduci poterit. Super ſubjectum Planum A B G C ſecundum rectam A B erigatur planum A D: & ſuper B C recta, planum C D, ſecantia ſe mutuò in B D recta. Rectę A B, B D ſunt in eodē plano, plano ſc: A D: & rectæ F D, D B in eodem quoq; plano, plano ſcilicet C D. Sed A B, F D non ſunt in eodē inter ſe plano. Quā vis enim D B ſit in eodem plano vtriq; A B & F D ſeparatim, Non tamen, vt, quæ eidem magnitudini ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales, ita ſequitur argumentum, quæ eidem tertiæ ſunt in eodem plano, inter ſe ſunt in eodem plano, cum illa tertia poſſit eſſe interſectio duorum planorum ſe mutuò ſecantium. Caveant itaq; adoleſcentes ab hac captiunculâ, quâ deceptus eſt Vitellio, in Opticis haud ſpernendus auctor, in Geometria minùs accuratus in prima propoſitione primi libri. Sed harum non in eodem plano non magnus eſt vſus in

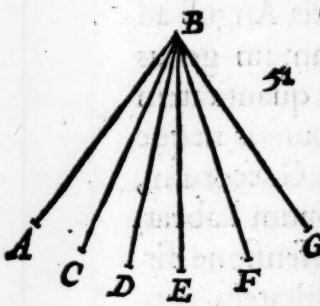


Geo-

Geometria. Porrò duæ rectæ in eodem plano, vel concurrentes ſunt, vel æquidiſtantes & parallelæ. Nam in rectis in eodem plano nihil eſt tertium : quamquam recta linea cum hyperbole comparata, vel cum conchiliata, etſi perpetuò propiùs accedat, neq; concurret vnquam, neq; tamen erit parallela : quod inter maxima Geometriæ miracula meritò cenſetur. De parallelis poſtea. Iam duæ rectæ concurrentes faciunt Angulum : figuram non item, quæ non niſi à tribus minimùm rectis claudi poteſt.

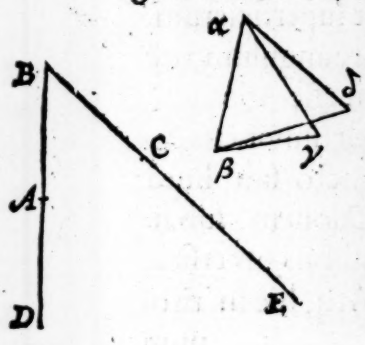
Supereſt quæſtio ardua cum primis & perdifficilis, de natura & eſſentia Anguli, ad quod prædicamentum ſeu ſummum genus debeat referri. Carpus & alij quantitatem eſſe dixerunt. Quæ opinio, quamvis neque Ariſtotelem neq; interpretum Græcorum, quod ſciam, quenquam patronum habeat, multa tamen habet pro ſui defenſione firmamenta; & quidem ad quantitatem continuam potiſſimùm pertinere. Nam primò angulus, vt alia continua, diviſibilis eſt propriè & per ſe, idq; in ſemper diviſibilia. Vt enim in magnitudine nullum eſſe diximus finem diviſionis, neq; vnquam perveniri ad mi-

minimum,ita nullus eſt angulus tam parvus qui non infinities ſecetur. Deinde quod Ariſtotelicis maximè proprium eſt quantitatis, æquale & inæquale dici propriè, per ſe & non per accidens (vt album dicitur æquale, quia ſuperficies æqualis) idem angulorum vel maximè proprium, æqualitatem dico & inæqualitatem. Hæ namq; propriæ paſſiones, diviſibilitas, & æqualitas, vel inæqualitas, cùm ad alia non pertineant pręter quanta, niſi per accidens, arguunt angulos eſſe quantitates. Huc addo angulum eſſe totum integrale, vt A B G, & componi ex A B C, C B D, D B E, E B F, & F B G. vt partibus integralibus, qui, vti in quantis ſit, & ſinguli minoris ſunt ſuo toto, & omnes ſimul ſumpti, æquales. Nam angulum qualitatem eſſe, quod cenſuit Eudemus Peripateticus, minùs probabilitèr aſſeritur: cùm qualitates recipiant ferè magis & minùs, nec tamen angulus vllus magis ſit vel minùs angulus alio angulo. Deindè qualitates, niſi per accidens, vt dixi, neque



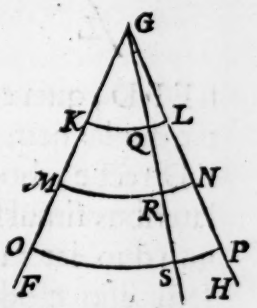
que diuisionem recipiunt, neq; maioritatem vel minoritatem : neq; possunt in parteis æquales dividi, quatenus qualia. Tertia est opinio, quam videtur Euclides sequi, angulum esse relationem, τὴν πρὸς ἅ, κλίσιν τῶν γραμμῶν πρὸς ἀλλήλας, inclinationem vel habitudinem linearum alterius ad alteram. Respondet Proclus acutè, quamvis ogganniat Thessalus ille Parisiensis, participare quodammodo trium horum summorum generum, quod mirum videri nemini debeat, cum & Triangulum sit quantum quoad dimensionem, & quale quoad figuram, & sic de cæteris figuris : sic angulum indigere magnitudine pro subjecto; indigere qualitate, per quam quasi propriam habet formam; indigere respectu & relatione comprehendentium ipsum linearum aut superficierum. Ex his itaq, omnibus constare angulum, nec tamen vnum aliquid istorum esse. Apollonius minùs propriè angulum definivit esse superficiei aut solidi in vno puncto sub lineâ vel superficie refracta collectionem ; sub linea sc. pro angulis superficialibus, superficie verò pro angulis solidis. Atq; hic in tiro-

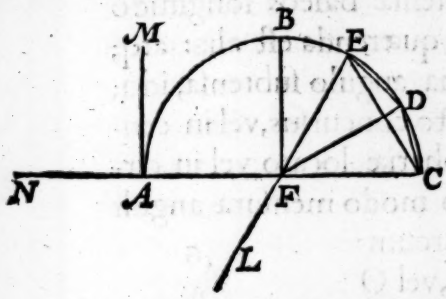
num gratiam, atq; vt natura anguli rectilinei, cujus vſus eſt, vt diximus, in Geometria præcipuus, pleniùs intelligatur, dicamus pauca, etſi propriè ea ſint alterius loci, de menſuratione quantitatis angulorum rectilineorum. Ac primò ſciendum eſt anguli quantitatem conſiſtere in varietate inclinationis, non in longitudine laterum, quibus auctis, vel minutis, manente eâdem inclinatione manet idem angulus: vt in hac figura angulus A B C nihilo major vel minor eſt angulo D B E. Deinde anguli menſura non ſpectatur propriè ex menſura ſubtenſæ baſis, nec pro ejus incremento vel decremento proportionalitèr creſcit aut minuitur. Nam quamvis verum eſt, in triangulo α β γ ſi β γ major fiat, manente eâdem longitudine α β, α γ linearum, major fit angulus ad α; & ſi minor, minor: non tamen angulus creſcit aut minuitur proportionabilitèr baſi, quod poſt oſtendetur. Cùm igitur neq; laterum comprehen-



den-

dentium neq; ſubtenſæ baſeos longitudo ſit menſura anguli, quærenda eſt alia: atq; ea eſt circumferentia angulo ſubtenſa, idq; dupliciter: ſc: puncto concurſus, vel in centro deſcriptæ peripheriæ locato, vel in circumferentiâ. Primo modo menſura anguli F G H eſt K L circumferentia, vel M N, vel O P. Sunt enim omnes eædem partes ſuorum circulorum, puta quadrantes, ſextantes, vel dodrantes ſuorum ſemicirculorũ. Et menſura anguli O G S eſt K Q circumferentia vel M R, vel O S. Et generalitèr quota pars eſt K L, vel K Q quadrantis ſui circuli; eadem pars eſt K G L vel K G Q anguli recti. Creſcunt ergò & decreſcunt anguli proportionabiliter ſubtenſis peripherijs, ſed non ſubtenſis rectis lineis. Vt in ſemicirculo A B C ſumptis C D, D E, æqualibus peripherijs, & ductis C D, D E, C E rectis, & à centro F, F E, F D rectis, erunt anguli E F D, D F C ad centrum F æquales propter æqualita-





tem circumferentiarum E D, D C, & rectæ lineæ E D, D C æquales, quia æqualibus ſubtenduntur circumferentijs, & angulus E F C duplus anguli E F D, quia circumferentia circumferentiæ dupla: neq; tamen erit E C recta dupla E D rectæ, hoc eſt æqualis E D, & D C lateribus ſimul ſumptis, quia omnis trianguli duo latera ſemper majora ſunt tertio. Iam alio modo menſuratur angulus per peripheriam, locato ſc: angulo non in centro, ſed in peripheria. Qui modus perſpicuus fit in deſcripta figura. Sit A centrum: quo centro, intervallo quocunque ſcribatur circulus F G B C. ſumptoq; B vt centro, intervallo eodem ſcribatur circulus E D A. Et producantur A B, A C ad D Et E. angulus B A C, id eſt Angulus D A E ſubtenditur à D E peripheriâ, puncto concurſus in peripheriâ E A D locato; & à peripheria B C, puncto concurſus

ſus in centro A locato. Dico peripheriam D E, duplam eſſe peripheriæ B C. Et ſic in omnibus alijs angulis ad centrum, & ad peripheriam eorundem vel æqualium circulorum. Exempli gratia, Centro C, eodem intervallo ſcribatur circulus, N O M, ſecans A D in N. Et A F latus anguli recti F A B producatur ad M. Angulus rectus, vt in centro, ſubtenditur à B C F, quadrante, idemque angulus, vt in peripheria, ab N O M ſemicirculo. Neque alio modo in doctrina triangulorum inſignitos angulos eſt reperire, quàm per gradus peripheriæ ſubtenſæ, ſiue anguli ad centrũ conſiſtant, ſiue ad peripheriam, ſeruatâ tamen hac conditione, vt dixi, vt pro deſignatione ejuſdem Anguli in peripheria, duplo plures ſumantur gradus quàm in centro. Hinc facillimus modus colligitur conficiendi angulum rectum

ſiue normalem, rectæ enim ductæ à punctis F & H vbicunq; in peripheriâ F C H, formant vbiq; in peripheria angulum rectum ſiue normalem. Reſtat vt de ſpeciebus anguli rectilineis diſſeramus, angulo ſcilicet Recto, acuto, & obtuſo, quos Euclides more ſuo nulla præmiſsâ primitùs diviſione ita definit.

Definit. 10. Ὅταν δὲ εὐθεῖα &c. Cum verò recta linea ſupra rectam inſiſtens, eos qui deinceps ſunt angulos (τὰς ἐφεξῆς γωνίας) æquales inter ſe fecerit, rectus eſt vterq; æqualium angulorum: & quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam, cui inſiſtit.

Definit. 11. Obtuſus angulus eſt, qui major eſt recto.

Definit. 12. Acutus autem, qui recto eſt minor.

Deinceps poſita, τὰ ἐφεξῆς, inquit Ariſtoteles in 6° Phyſ. ſunt, ὧν μηδὲν μεταξὺ συγγενὲς: inter quæ nihil interjectum eſt ejuſdem generis. Euclides angulos deinceps appellat illos duos angulos, qui ab vna linea in alteram incidente fiunt ex vtrâq; parte quidem incidentis lineæ, ſed ex eadem parte lineæ, cui inſiſtit: vt in figura penultimâ E F C, & E F A, ſunt anguli deinceps, item

DFC, DFA. & BFC, BFA. Quod si duæ rectæ se secent, fiunt anguli ad verticem κατὰ κορυφὴν vocati, vt EFC, AFL; & EFA, CFL. Si verò recta duas rectas secuerit, vt recta EC rectas FC & ED, anguli ECF & CED dicuntur à Geometris anguli ἐναλλάξ, hoc est, alternatim positi ex vtraque parte rectæ EC. Quas loquendi formas operæpretium est Tirones obseruare, non vt magna artis mysteria, sed vt minutias necessarias. Iam si anguli isti ἐφεξῆς, deinceps, positi, sint ex vtraq; parte insistentis rectæ æquales, vterque angulus rectus est, vt in figura anguli BFC, BFA æquales sunt, ideóq; recti, mensurati s. à duobus quadrantibus AB, & BC circuli centro F descripti. Sin anguli ἐφεξῆς, deinceps, fuerint inæquales, vt EFA, EFC, alter erit obtusus & maior recto vt EFA, compositus nempè ex recto AFB & BFE: alter acutus & minor recto, vt EFC, qui minor est, quàm BFC rectus, quantitate anguli EFB. Nam, vt anteà monui, anguli non minùs quàm magnitudines constant ex partibus integrantibus totum: vt in figura angulus BFC rectus ex tribus

an-

angulis acutis, B F E, E F D, D F C componitur, tanquam partibus ſuis integralibus. Porrò recta inſiſtens, quæ facit vtrinq; æquales angulos & rectos, perpendicularis vocatur ad rectam, cui inſiſtit; cautè ſcilicet, quia eſt & alia κάθετος, perpendicularis in 11° lib. quæ perpendicularis eſt ad planum. Nec indignum obſervatione καθετου hoc loco generalitèr accipi, cûm κάθετος ſpecialitèr dicatur, quatenus a puncto extra in lineam demittitur, cùm illa quæ à linea in recto angulo ſurgit, peculiari nomine vocetur ὀρθή, ab Euclide, cæteriſq; Geometris: quæ tamen duæ lineæ, vt verum fateor, ratione magis quam re differunt. In definitione verò obtuſi & acuti anguli rectè monet Proclus ſupplendũ eſſe genus: vt obtuſus angulus definiatur angulus rectilineus, qui major eſt recto; & acutus itidẽ, rectilineus angulus, qui minor eſt recto. Nam in figura, B A N angulus, à B A circumferentia & A N recta comprehenſus major eſt recto, neque tamen obtuſus eſt angulus: & B A M περιφερικὸς à B A peripheria, & A M recta comprehenſus; & B A F, quem angulum Semicir-

cir-

circuli appellant, comprehensus à B A circumferentiâ & A F rectâ, vterq; recto minor est, neq; tamen acutus. In sphæricis etiam angulis est acutum & obtusum, sed excluduntur per genus, nempè rectilineum angulum.

Ὅρος ἐστὶν &c. Terminus est, quod alicujus est finis. Geometria, vt ante dictũ est, inventum fuit Aegyptiorum regundis finibus Nili alluvione confusis excogitatum. Quemadmodum igitur in agris disterminandis necessarij sunt limites & ὅροι, vt putâ sæpes, fossæ, muri, ita in Geometria ὅροι sive termini sunt, quibus superficies vel corpus terminatur. Neq; enim finiendis lineis vox ὅρα, termini, à Geometris vsurpatur, sed πέρατα, finis. Neq; alius est Terminus, more Geometrarum loquendo, quàm linea ad terminandam superficiem, & superficies ad terminandum corpus. Sed si punctum non est terminus, vt certè non est (quia ὅρος est tantum σχήματος ὅρος) sed πέρας finis, cur Euclides definivit ὅρον terminũ, ὃ τινός ἐστι πέρας, quod alicujus est finis, quod nullam habet definitionis faciem, sed vocabuli potiùs per suum sy- *Definit. 13ª*

nonymum explicationem. Nam ſi terminus eſt alicujus rei finis, quid ni finis ſit alicujus rei terminus? An dicendum, in definitione addendum eſſe vocabulum figuræ, vt terminus ſit quod alicujus figuræ eſt finis? Sed neq; hoc reprehenſione carebit, vt terminus definiatur per figuram nondum definitam neq; cognitam, & figura viciſsim per terminum definiatur, circularitèr: Niſi ſi hoc in relativis vtcunq; ferri poteſt. Monendi inſuper eſtis inter ὅρος, terminum, & periocham, perimetrum ſive ambitum figuræ, diſcrimen eſſe, quæ tamen pleriq; confundunt. Nam in triangulo quodlibet latus per ſe ſumptum ὅρος eſt, i. Terminus: ſed omnia latera ſimul ſumpta, perimeter. Alioqui in definitione figuræ fruſtra diceret Euclides, figuram eſſe, quod ab aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur, niſi hoc verum eſſet in Geometria, figuram vnicam tantùm habere perimetrum, ſed plures habere poſſe terminos, quanquam per accidens idem eſſe poſſit & terminus & perimeter, vt in circulo, Ellipſi & ſimilibus.

Definit. 14. Σχῆμά ἐστι: figura eſt quod aliquo vel aliqui-

quibus terminis continetur. Logicis quarta ſpecies qualitatis eſt forma & figura, quas ita differre cenſet Ammonius & Ammonio conſentiens Proclus, vt in animatis dicatur forma; in rebus non animatis, & Phantaſia conceptibilibus, qualia ſunt omnia cum primis Mathematica (hæc enim in ſola phantaſia ſuum habent eſſe) figura dicatur. Contrà Simplicius hæc duo verba indiſcriminatim vſurpari, & in animatis figuram & in inanimatis formam. Iamblichus formam ſolùm in rebus naturalibus dici, in Mathematicis nunquam, ſed figuram.

Quod aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur. Aliquo, vt circulus, ellipſis, ſphæra, ſphæroides, &c. Aliquibus, nempe vel duobus, vt ſemicirculus, ſegmentum: vel pluribus quam duobus, vt omnes figuræ rectilineæ, (nam duæ rectæ lineæ nullam poſſunt claudere figuram) cubus, pyramis &c. Hæc definitio à quibuſdam etiam veterum reprehenſa eſt, quòd definire videatur genus per enumerationem ſpecierum, ac ſi quis Brutum definiret, quod eſt aquatile, vel aëreum, vel terreſtre. Ineptè Poſidonius, figura

est finis claudens, συλλεῖον πέρας: quasi verò circulus esset circumferentia, aut triangulum tria latera. Nam circumferentia quidem & tria latera figurant circulum & triangulum; sed circulus & figura suapte naturâ quanta sunt, & superficies sic & sic terminatæ. Itaque in omni figurâ hæc duo necessariò considerantur, ipsa figuratio & clausura, quæ qualitas est: & ipsa materia sic clausa, quæ quantitas. Porrò figura dividitur in figuram superficialem, & solidam. Superficialis rursus in planam, globosam, mixtam. Solida in sphæram, Conum, Cylindrum, Cubum, Prisma, Pyramidem &c. Sed Euclides suo more omissâ omni divisione statim ad definitionem properat membri magis principalis, aut doctrinæ elementari magis proprij.

LEC.

LECTVRA VI.

DIXIMVS superiùs de angulis & eorum speciebus, recto sc acuto & obtuso; diximus de mensuratione angulorum, quorũ quantitas non pendet ex longitudine laterum. Neq; enim longitudo aut brevitas laterum mutat angulorum quantitatem, manente eâdem inclinatione, κλίσει laterum: Neq; ex quantitate basium pendet. Nam quamvis verum sit, basi auctâ ijsdem manentibus lateribus, angulum augeri; & diminutâ minui, tamen angulus non augetur proportionalitèr augmento basis, vt tum ostendi in exemplo, duplici facto angulo basim quidem majorem fieri, sed non plenè duplicari. Sed solam dixi veram & proportionabilem quantitatem anguli augeri & minui

minui perfectè proportionalitèr ſubtenſæ angulo circumferentiæ, angulo ſ. conſiſtente vel ad centrum circumferentiæ, vel in ipſa circumferentiâ; ita tamen vt idem angulus conſiſtens ad circumferentiam ſubtendatur à duplo pluribus partibus aut gradibus ſui circuli, quàm in centro. Vt ſi angulus aliquis in centro conſiſtens ſubtendatur exempli gratiâ à 30 gradibus, idem angulus in circumferentia conſiſtens ſubtendatur à gradibus 60 ſui circuli, vt tum à nobis eſt grammicè demonſtratum. Iam ſequitur vt de figurarum ſpeciebus diſſeramus: nam figuram, genus ipſum, ſuprà definivimus.

Definitio 15.

Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ὑπὸ μιᾶς &c. Circulus eſt figura plana vnâ lineâ contenta, quæ circumferentia appellatur: ad quam ab vno puncto intra figuram exiſtente omnes rectæ lineæ incidentes ſunt æquales. In his verbis ſtatim cuivis apparere puto, duas potentiâ definitiones contineri, vnam circuli, circulus eſt figura plana ab vna linea, quæ circumferentia vocatur, comprehenſa: altera peripheriæ, peripheria eſt linea, ad quam &c. Hanc definitionem rectè Proclus affir-

mat

mat ὅτι πᾶσι ἀκριβείας πεπλήρωται, hoc est, omnis perfectionis numeros impleviſſe. *Figuram* poſuit pro genere, quia non eſt infinitæ ſed terminatæ naturæ, & vndiq; clauditur. *Planam*, vt diſtingueret à globoſa, &c. Vna linea *contentam*, vt diſtingueret ab ijs, quæ pluribus lineis continentur, vt ſemicirculus, triangula &c. Quæ circumferentia appellatur; nam ellipticum χωρίον vnâ quoq; lineâ clauditur, quæ ellipſis dicitur, circumferentia non dicitur: & Area Hederacea ab vnâ etiam clauditur lineâ. Ad quam ab vno puncto omnes incidentes, &c. ab ellipſeos centro non poſſunt plures æquales duci, quàm duæ, inquit Proclus: quod verum eſt de maximis & minimis: ſed circa maximas & minimas duæ vtrinq; eſſe poſſunt æquales, vt fortaſſe minùs cautè loquutus videatur, cum in ellipſi à centro ellipſeos ad ambitum, præterquam in maximis & minimis quatuor poſſint incidere æquales. Ab vno puncto &c. Nullum enim aliud punctum intra figuram poteſt hoc præſtare, præter centrum: & quod putavit verum eſſe in ellipſi, in circulo certè veriſſimum eſt, vt ab

omni

omni alio puncto non possint æquales cadere plures duabus. Intra figuram existente &c. Nam si à centro ad planum circuli recta linea perpendiculariter erigatur, à quolibet puncto perpendicularis sic erectæ extra planum circuli, omnes lineæ ductæ ad peripheriam circuli sunt quidem æquales, sed hoc punctum ita sumptum non est in plano circuli, sed extrâ; & propriè polus dicitur, nullo modo centrum. Atq; hæc est πλοκολογία, hoc artificium Procli in evolvendâ hac definitione circuli.

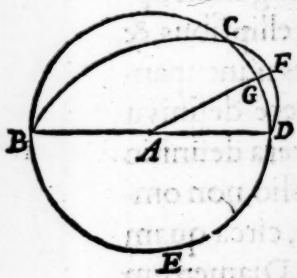
Definit. 16. Centrum verò circuli punctum illud vocatur. Hæc definitio ex superioribus manifesta est. Debuit, inquit Ramus, definivisse centrum figuræ generalitèr; vt τὸ καθόλου servaretur. Fortasse de centro gravitatis in planis somniavit vir bonus: quod punctum est vnde appensum planum manet in æquilibrio æquidistans Horizonti: quod quamvis verum sit fortasse in circulo, & parallelogrammis, centro semicirculi congruere non potest. Adeò impossibile est illud τὸ καθόλου in omnibus reperire, cùm verba robus non semper ex æquo respondeant, neque

neque æqualitèr ἰσορροπῶσι. Nam & in ſolidis ſunt centra gravitatis, diverſæ planè naturę.

„ Diameter circuli eſt recta quædam li- *Definit. 17.*
„nea per centrum ducta, & ex vtrâq; parte à
„ circumferentia circuli finita &c. Diame-
„ter circuli. Sunt enim & aliæ diametri præterquam in circulo, vt in Parallelogrammis, qui tamen magìs propriè Diagonij vocantur, vtpote ab angulo ad angulum oppoſitum ductæ: & diametri in ellipſibus, & diametri in Sphæris, quæ Axes nuncupantur, inquit Proclus. Sed ſi verè definivit Theodoſius in 1°, aut ſi ea eſt vera definitio Theodoſij, & non ſpuria exſcholio, non omnis diameter axis eſt, ſed ea ſola, circa quam manentem ſphæra volvitur. Diametrum autem Latinè dimetientem vocant, vt Plinius & alij, ſicut circumferentiam nonnulli etiam veterum Ambientem.

Quæ & bifariam circulum ſecat. Hoc demonſtravit Thales Syllogiſmo ab impoſſibili, quæ apud Proclum extat. Quam demonſtrationem vti non aſpernor, quia ingenioſa eſt, ita Euclidi, qui definitione maluit eam rem, quam demonſtratione com-

prehendere, facilè ignoſco. Neque tamen erit fortaſſe ingratum, Thaletis, qui vnus è ſeptem Græciæ ſapientibus, & primus, ſi benè memini, audit, ſapientiam in tenui hoc argumento ſcrutari. Sit centro A intervallo quocunque deſcriptus circulus B C D E, & per A ducatur diameter B D dividens circulum B C D E in duos ſemicirculos; dico ſemicirculum B D E Semicirculo B C D æqualem eſſe. Volvatur enim ſemicirculus B E D ſuper manentem diametrum B D, & ſuperimponatur ſemicirculo B C D: dico congruere perfectè ſemicirculum B E D ſuper ſemicirculum B C D, ita vt nullâ in parte excedat neq; deficiat, nullâ ex parte egrediatur, deflectat aut deviet B E D circumferentia à B C D circumferentia, aut vlla pars vnius ſemicirculi ab vlla parte alterius. Nam ſi deviat, ſit B E D ſemicirculus deflexus à B C D in puncto F. Et ab A centro ad F ducatur recta A G F. A G recta erit æqualis rectæ A D, quia vtraq; à centro A ad circumferentiam A C G D. Similitèr erit A F recta æqualis A D, quia vtraque



traq; à centro A, ad circumferentiam BFD: quæ autem eidem æqualia, inter ſe ſunt æqualia. Ergò A G, A F, æquales inter ſe, pars toti, quod eſt impoſſibile. Non ergò non congruunt ſemicirculi. Congruunt ergò, & per conſequens æquales ſunt, quia quæ congruunt, ſunt æqualia, vt poſteà apparebit.

Semicirculus eſt figura comprehenſa à diametro & deſecta per diametrum circuli circumferentia.) Ex definitione circuli centrum invenit Euclides, à centro diametrum definivit: jam à diametro, ſemicirculum, à figurâ vnâ lineâ clauſâ ad eã, quæ duabus, ordine progrediens. Porrò figura plana duobus terminis comprehenſa, vel à duabus clauditur circumferentijs, vt μηνισκος, lunula; vel à rectâ & circumferentiâ, vt ſemicirculus, & ſegmenta circulorum; vel à duabus lineis mixtis, veluti ſi duæ ellipſes ſe invicem interſecent; vel à mixtâ & circumferentiâ, vt cùm circulus ſecat ellipſim: vel à mixtâ & rectâ, vt ellipſis dimidium. Semicirculus autem ex diſſimilibus eſt lineis, verùm ſimplicibus. *Definit. 18.*

Centrum autem ſemicirculi idem eſt, quod *Definit. 19.*

quod etiam circuli)Hæc definitio extat quidem apud Proclum: in noſtris exemplaribus Euclidis tam manuſcriptis, quàm excuſis,irrepertum: vt contrà definitionem; quæ ſequitur,ſegmenti, in excuſis,neq; Proclus agnoſcit, neq; eſt hujus loci, ſed ad tertium elementorum, vbi repetitam videmus, pertinet,hîc expungenda. Commandinus tamen retinet, vt eſt vbiq; tenax vulgatæ editionis Græcæ,etiam quando manifeſtè vitioſa eſt. Itaq; in multis locis conſtat eum errâſſe,quia vulgatâ editione contentus, codices Euclidis manuſcriptos, quod facilè potuit in Italiâ, adire neglexerit. Ex hac autem definitione rectè concludit Proclus centrum tres habere locos. Aut enim intra figuram eſt,vt in circulo: aut in ambitu,vt in ſemicirculo:aut extra, vt in minori ſegmento & conicis ſectionibus, quæ oppoſitæ vocantur.

Definit. 20. Εὐθύγραμμα σχήματα &c.) Rectilineæ figuræ ſunt,quæ rectis continentur lineis.

Definit. 21. Trilateræ quidem,quæ tribus.

Definit. 22. Quadrilateræ, quæ quatuor.

Definit. 23. Multilateræ verò; quæ pluribus, quàm quatuor

quatuor rectis lineis comprehenduntur.

Absolutis definitionibus figurarum, vt pro elementari institutione, vnicâ lineâ comprehensarum, & duabus, circuli sc. & semicirculi, jam ordine procedit ad definiendas figuras rectilineas, rejectis omnibus alijs, vel vt otiosis & nullius in arte vsus, vel vt minùs aptis, vt dixi, ad hanc elementarem institutionem. Porrò rectilineæ figuræ tribus ad minimum terminantur lineis. Neq; enim duæ rectæ lineæ possunt claudere superficiem. Harum figurarum principium est & princeps omnium, Triangulum. Principium dico, quia ex eo cæteræ omnes figuræ rectilineæ componuntur, in eáq; resolvuntur. Sic quadrangulum omne ducta diagonio in duo resolvitur Trigôna, quinquangulum in tria, sexangulum in quatuor, & sic de cæteris. Triangula autem & quadrangula definivit hic Euclides, vtpote πρωτόγονα, & ad hunc primum librum propiùs pertinentia; reliqua, quæ sunt infinita, generali nomine multilaterarum complexus. Et in triangulis quidem cùm duplicem instituerit divisionem, vnam à laterum di-

verſitate, alteram ab angulorum, ab eâ quæ eſt laterum, vt notiore & magis in ſenſum incurrente, exorſus eſt.

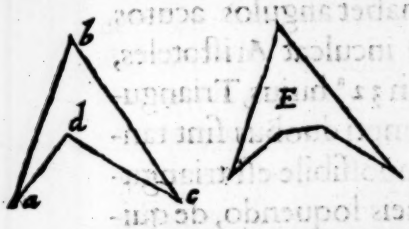
Definit. 24. Trilaterarum autem figurarum, rectis ſc: lineis comprehenſarum, ſive triangulorum, quoad latera tres ſunt ſpecies: æquilaterum quidem quod tria habet æqualia inter ſe latera: Iſoſceles verò, quod duo ſolùm latera inter ſe æqualia, & tertium vtriq; inæquale: ſcalenum, quod tria habet inæqualia inter ſe latera. Iſoſceles Martianus Capella æquicrurium vocat, quod ex tribus lineis duas æquales habet, quibus quaſi cruribus inſiſtat. Scalenum Heſychius interpretatur σκολιὸν, hoc eſt tortuoſum: cujus vocabuli alioqui, niſi in Geometria, infrequens eſt vſus in lingua Græca.

Definit. 27. Iam Trilaterarum figurarum, ſiue triangulorum, quoad angulos, tres ſunt ſpecies. Aliud eſt ὀρθογώνιον, Rectangulum, quod vnum habet rectum angulum, reliquis duo-

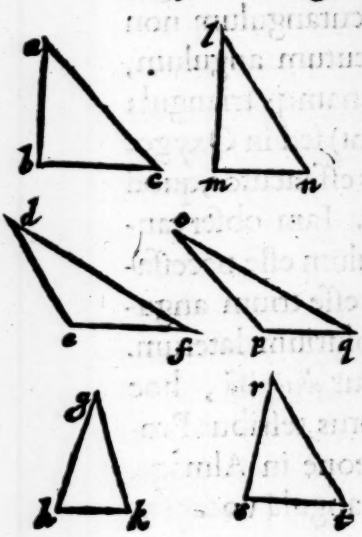
Definit. 28. bus exiſtentibus acutis: aliud Amblygoniũ ſive obtuſangulum, quod vnum habet obtuſum angulum, reliquis, vt ſuprà, exiſtenti-

Definit. 29. bus acutis: Aliud Oxygonium, ſive Acutan-

tangulum, quod tres habet angulos acutos. Cum enim, quod ſæpè inculcat Ariſtoteles, & demonſtratum eſt in 32. hujus, Trianguli tres anguli ſimul ſumpti duobus ſint tantùm rectis æquales, impoſſibile eſt triangulum, de planis rectilineis loquendo, de quibus ſolis hic omnis ſermo, aliquod eſſe poſſe, quod duos habeat angulos rectos, multo minùs duos obtuſos, hoc eſt, majores rectis. Sphæricorum triangulorum alia eſt ratio, quæ & duos rectos, & duos obtuſos, imò tres etiam habere poſſunt. Triangulum verò Oxygonium Acutangulum non ſatis eſt vnicum habere acutum angulum, ne duos quidem (cuncta namq; triangula hoc pacto acutangula eſſent) ſed in Oxygonijs oportet omnes angulos eſſe acutos, quod in reliquis duobus non fit. Iam obſervandum eſt, non omne triangulum eſſe neceſſariò trilaterum, cum poſſet eſſe trium angulorum, & quatuor vel plurium laterum. Qualia ſunt quæ appellantur ἀκιδοδῆ, hoc eſt, cuſpidata, quæ Zenodorus, teſtibus Proclo in hunc locum, & Theone in Almageſtum, κοιλογώνια, id eſt Cavangula vocat: vt



in figura A B C D vbi quatuor ſunt latera A B, B C, C D, D A; nec tamen plures quàm tres anguli ad A, & ad B, & ad C. Nam ad D nullus eſt angulus ad figuram pertinens, quia nullus eſt angulus duobus rectis æqualis; nedum major, ſed angulus ſit extra figuram. Nec quatuor tantùm latera, ſed & plura eſſe poſſunt, vt in E figura: nec ſint tamen plures tribus angulis. Porrò ex mixtione duplicis hujus diviſionis apud Euclidem (qui omnem cavangulorum mentionem vt non magni in Geometria vſus neglexit) ſeptem oriuntur ſpecies Triangulorum: AEquilaterum, quod non poteſt eſſe niſi



Oxygonium vt Z. Iſoſ-

Isosceles, quod potest esse vel Orthogonium, vt A B C; vel amblygonium vt D E F, vel Oxygonium, vt G H K. Item scalenum, Orthogonium, vt L M N, vel amblygonium O P Q; vel oxygonium vt R S T: ita septem sunt species Triangulorum, neq; plures neq; pauciores.

" Quadrilaterarum figurarum &c.) à trilateris figuris ad quadrilateras ordine progreditur Euclides, neq; vltrà procedit hoc loco in multilateris recensendis, quòd cæterarum non sit magnus in Geometria vsus. Commemorantur tamen in his elementorum libris Pentagonica, Hexagonica, Decagonica & quindecim angulorum figura, quarum ex ipsis nominibus statim apparent sine vllâ definitione naturæ: vt in earum divisionibus, & subdivisionibus invtilis sit labor tempus frustrà terere. Tantùm de plurilateris satis sit hanc generalem in omnibus partitionem tenere, in ordinatas, τεταγμένας, & inordinatas. Verbigratiâ, Pentagonum ordinatum est, quod habet quinq; latera æqualia, & quinq; angulos æquales, & sic de cæteris: in inordinatis contrà. Sed ad quadri-

latera redeamus.

Quadrilaterarum figurarum Tetragonum, quod omnia latera habet æqualia, & omnes angulos rectos. Hanc figuram Latini, vt mihi videtur, aptius, quadratum appellant. Nam tetragonum, hoc est quadrangulum ex vi verbi ad reliqua quadrilaterarum genera commune est, sed non ex vsu Geometrarum, qui non alio vtuntur sensu, quàm pro quadrilatero æquilatero & rectangulo, impositio sc. communi nomine generis huic certæ speciei, quæ cùm & laterum æqualitate & angulorum rectitudine cæteris omnibus quadrilateris quadrangulisve excellat, non immeritò καὶ ἐξοχὴν sola nomen quadrati sortita est. Præstantibus enim speciebus totius sæpe generis nomen tribuimus.

A

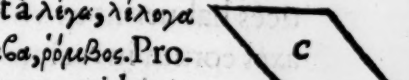
Sequitur ἑτερόμηκες, oblongum, vel alterâ parte longius, quod quatuor habet rectos angulos, sed non omnia latera inter se æqualia. ἑτερόμηκες nomen potuit etiam Rhomboidi congruere ex vi verbi, sed non ex vsu artis. Huius verbi & duorum sequentium

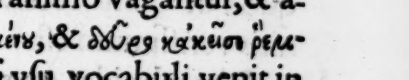
B

tium parcior in ſequentibus fit mentio, quòd totum hoc genus nomine rectanguli parallelogrammi ferè ab Euclide inſigniatur. Ἑτερόμηκες autem dictum eſt eâdem analogiâ, quâ aqud Xenophontem ἑτερόγναθος de equo, qui vnam maxillam habet alterâ maiorem.

Rhombus, Figura quæ æquilatera quidē, ſed rectangula non eſt. vt C. fig. Rhombus à verbo ῥεμβεσθαι venit, vt à λέγω, λέλογα λόγος; ſic à ῥόμβω, ἔρρομβα, ῥόμβος. Proclus à ῥομβέομαι deducere videtur, quod verbi rarò Græcis in vſu: cùm ῥεμβεσθαι, ſit vſitatum ſatis ἀντὶ τοῦ πλανᾶν, vt ait Heſychius. ῥεμβεσθαι apud Chryſoſtomum Homiliâ viceſimâ quartâ in Acta, de ijs qui in alia omnia inter orandum animo vagantur, & alibi, τὴν ἀλλαχοῦ ῥεμβομένην, & δοῦλος κακῶς ῥεμβεσθαι. Ex hoc forenſi vſu vocabuli venit in Geometriam ῥόμβος, quod nihil eſt aliud, quàm quadratum ῥεμβοειδὲς, .i. ſuis compagibus & juncturis ſolutum, ijſdem manentibus lateribus, ſed angulis è ſuo ſitu & ſede emotis: ſicuti eſt etiam ῥομβοειδὲς, nihil aliud quam ἑτερόμηκες σαλευθὲν, emotum ſc: & ſu-

Definit. 32.





is ſolutum juncturis, ad eundem modum quo circulus in modum fundæ ῥεμβόμδοος, inquit Proclus, apparet ellipſis. Illud autem Procli de fundâ eſt ex manuſcriptis, in vulgato Græco non extat: quod tamen vel maximè oportuit. Nam apud Heſychium & Suidam ῥομβεῖν eſt σφενδονᾶν, funda jactare. Apud Archimedem eſt Rhombus ſolidus cùm duo Coni eandem baſim habentes vertices habuerint ex vtrâq; baſis parte, ita vt axes eorum in rectam lineam ſit, alter alteri, quæ ex ambobus conis conſtat ſolida figura: ideò, vt puto, Rhombus ſolidus dictus, quòd hæ duæ ſuperficies ſectæ per axem, communem ſectionem faciant Rhombum planum, qualis in hoc loco definitur, id quod de Conis rectis æquè altis in baſi vnitis veriſſimum eſt.

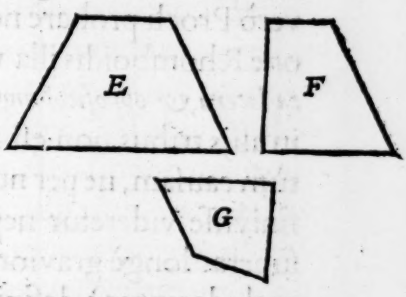
Definit. 33. Rhomboides, quæ & oppoſita latera, & oppoſitos angulos æquales inter ſe habet, neq; tamen æquilatera eſt neq; rectãgula. vt fig. D.

D

Definit. 34. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia vocentur.

Quadrilaterarum figurarum ex Proclo plena

plena diuiſio hæc eſt: quam ſi hoc modo non fecit Euclides, noluit ſc. quia in hac diſtributione aſſumitur paralleliſmus nondum ab Euclide definitus. Quadrilateræ ergo figuræ ſunt aut parallelogrammæ, quæ oppoſita ſc. latera habeant parallela, aut non parallelogrammæ. Parallelogrammarum quatuor ſunt ſpecies. Prima eſt & omnium præcipua, quæ rectangula eſt & æquilatera, græcè τετράγωνον, latinè quadratum. Secunda, quæ neutrum horum habet, hoc eſt, neq; rectangula eſt, neque æquilatera, quod Rhomboides appellant. Tertia, quæ rectangula eſt, ſed non æquilatera, & ἑτερόμηκες dicitur. Quarta, quæ æquilatera eſt, ſed non rectangula, vt Rhombus. Iam quadrilaterarum non parallelogrammarum, Euclidi vnica eſt ſpecies; Nos ex Proclo tres faciemus. Prima eſt, quando duo latera tantùm inter ſe ſunt parallela, & rectæ parallelas connectentes inter ſe æquales, vt in figura E. Secunda, cùm duo quidem la-



tera ſunt inter ſe parallela, ſed lineæ conjungentes inæquales, vt in figura F; atq; has duas ſpecies communi Trapeziorum nomine complectitur Proclus. Tertium genus vt in figura G, vbi nullum latus alteri parallelum: ad Trapezoidea amandat. Ita ſeptem ſunt ſpecies Quadrilaterarum figurarum, quadratum, altera parte longius, Rhombus, Rhomboides, Trapeziorum duæ ſpecies, & Trapezoides, vocabulum Euclidi non vſurpatum, qui hæc tria poſtrema quadrilaterarum genera vnico Trapezij vocabulo complectitur. Et quidem, vt hoc obitèr pro Criticis notem, ex hac Trapezij definitione videntur menſæ veterum, non parallelogrammæ fuiſſe, vt nunc aſſolet, ſed arctiores ad vnum finem, ad alterum latiores. Illud verò Procli probare non poſſum, in definitione Rhomboidis illa verba, *quod habet oppoſita latera, & oppoſitos angulos*, adjecta eſſe, quod in alijs tribus non eſt factum, ob eam tantùm cauſam, ne per nudas & ſolas ipſum definiviſſe videretur negationes. Atqui cauſa ſuberat longè gravior, doctiſſime Procle, vt excluderentur à definitione Trapezia, quæ ſimilitèr nec æquilatera ſunt, nec rectangula.

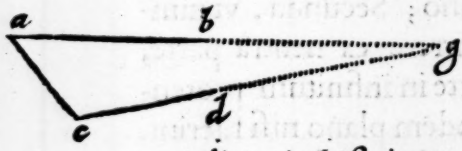
LEC-

LECTVRA VII.

VLTIMA est parallelarum definitio. Parallelæ seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtrâq; parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se concurrunt. Ad paralleliſmum duarum rectarum duæ conditiones necessariò requiruntur, prima, vt sint in eodem plano; Secunda, vt nunquam possint concurrere ex neutrâ parte, etiamsi ex vtrâq; parte in infinitum protendantur. Porrò in eodem plano nisi fuerint, sed altera in subjecto plano, altera in sublimi vt anteà ostendi in expositione duarum rectarum inter se comparatarum, neq; concurrent vnquam, neq; tamen sunt parallelæ. Ridiculus ergò Vitellio, qui cornicum oculos *Definit. 35.*

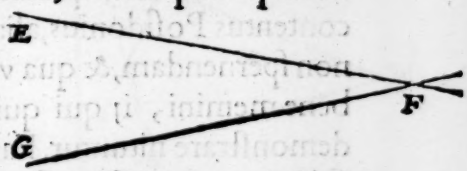
los

los volens configere, hanc conditionem, vt propriam paſſionem voluit demonſtrare de parallelis, quæ neceſſariò eſt præſupponenda. Alioqui nullus eſt paralleliſmus. Propoſitio Vitellionis hæc eſt. Omnes lineæ æquidiſtantes in eâdem ſuperficie planâ neceſſariò conſiſtunt: ac ſi velit demonſtrare omne quadratum eſſe figuram quadrilateram. Atq, huic propoſitioni, vt vno abſurdo dato ſequuntur innumera, demonſtrationem, vt ſibi viſus eſt, bellam attexit; craſſiſſimum, vt ſuprà oſtendi, paralogiſmum. Euclides autem, vt ſummum decuit artificem, vtrinq; ſuam munivit definitionem, appoſitâ hac conditione (in eodem plano) loco generis, & addendo (non concurrentiam) loco differentiæ. συμπίπτωσι, non concurrentes intelligendæ, etiamſi vtraq; linea in infinitum producatur. Nam & non parallelæ, ſi aliquatenus producantur, poſſunt non concurrere, vt A B, C D. Neque hoc ſatis eſt, niſi ex vtrâq; parte in infinitum productæ non concurrant. Nam

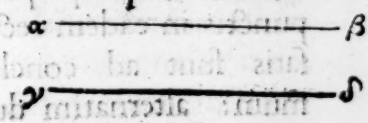


fieri

fieri poteſt, vt non parallelæ, vel etiam ſecantes altera alteram, ex vnâ parte producantur infinitè ſine concurſu, vt E F, G F ex parte E & G, quia duæ

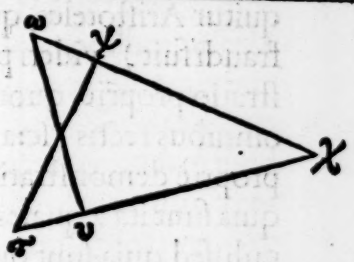


rectæ non claudunt ſuperficiem; ex alterâ verò parte concurrant. Nam in duabus rectis lineis in eodem plano exiſtentibus neceſſarium eſt, vt vel productæ concurrant, vel æquidiſtantes ſint; quod in rectâ lineâ ad Hyperbolam vel conchiliatam comparata non eſt neceſſe, etiamſi quo longiùs ductæ, eo ſibi magis magiſq; appropinquent: neq; tamen, cùm imminuatur ſemper intervallum, vnquam coibunt, quod vel maximè admirabile eſt in Geometriâ Theorema, oſtendens συνέθυσίν τινα γραμμῶν τινῶν ἀσύνθυστον: appropinquationem quandam linearum, nunquam tamen concurrentem. Monendi ſunt etiam juniores de illâ loquendi formulâ, quæ non in frequens eſt apud Geometras: cùm volunt intelligi lineam α β parallelam eſſe lineæ γ δ, non rarò dicunt rectam α β eſſe



παρὰ τὴν γ δ .i. parallelam esse τῇ γ δ. Atque hæc de definitione parallelarum; qua non contentus Posidonius, aliam substituit certè non spernendam, & qua vtuntur nonnulli, si bene memini, ij qui quintum postulatum demonstrare nituntur. Parallelæ, inquit Posidonius, sunt rectæ lineæ, quæ in eodem plano sitæ neq; annuunt neq; abnuunt, sed æquales habent omnes perpendiculares, quæ à punctis alterius ad alteram ducuntur. Quæcunq; verò majores aut minores fecerint perpendiculares, coibunt aliquando inter se. Perpendicularis siquidem spatiorum altitudines, linearumq; distantias determinat. Quocirca æqualibus quidem perpendicularibus existentibus, æquales etiam sunt linearum rectarum distantiæ; majoribus verò atq; minoribus factis, distantia quoque fit major & minor, & inter se aliquando coibunt, qua parte perpendiculares sunt minores. Sequendo hanc definitionem Posidonij, duæ perpendiculares à duobus punctis in eâdem rectâ ad alteram ductæ, satis sunt ad concludendum parallelismum: alternatìm ductæ non item. Vt

sumptis



sumptis ωχ, τχ æqualibus rectis, quæ concurrant in χ, ductaq; ab ω perpendiculari ωυ, & à τ perpendiculari τψ, erunt quidem ωυ, & τχ æquales, & tamen non sequitur parallelismus rectarum ωχ, τχ. Addit Geminus elegantissimi vir ingenij, ipsum non coincidere, sive non-concurrentiam etiam in eodem plano non necessariò inferre parallelismum. Concentricorum namq; circulorum circumferentiæ non coëunt, quod Euclides in parallelis requirit, & æquales habent inter se perpetuò distantias, quod Posidonius. Neq; tamen verè parallelæ sunt, vtpote non rectæ. Atq; hoc loco non possum satis mirari Petri Rami inadvertentiam dicam, an inscitiam, qui cap. 5° primi posteriorum reprehensam dicit ab Aristotele definitionem Euclidis illis verbis, Εἰ δέ τις δείξειεν, ὅτι αἱ ὀρθαὶ οὐ συμπίπτουσι &c. hoc est, si quis ostenderit rectos non concurrere (non enim de rectis lineis, sed de rectis angulis loquitur

quitur Aristoteles, quod fortasse bono viro fraudi fuit) videri possit hujus esse demonstratio propriè, quoniam hæc affectio est in omnibus rectis (sc: angulis) non est autem propriè demonstratio. Siquidem id fit, non quia sunt ita æquales (sc: quatenus recti anguli) sed quia sunt quomodocunq; æquales, sc: duobus rectis. Sensus enim est verborum Aristotelicorum hic, attestantibus etiam doctissimis interpretibus Themistio, & Philopono (quamvis apud Themistium error est in græco codice, τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν, pro ἐντὸς γωνιῶν) Sensus inquit, est, si quis demonstraverit hoc Theorema: Si in duas rectas lineas recta linea incidens, duos interiores angulos & ad easdem partes, rectos fecerit, parallelæ erunt lineæ, cum deberet dicere, non rectos fecerit, sed duobus rectis quovismodo æquales, is certè vitium grave commiserit in demonstrando & contra regulam τοῦ καθόλου. Quam tamen reprehensionem ad vicesimam octauam hujus, vt magnum artificem decuit, posito τῷ καθόλου vitavit Euclides. Ex hac reprehensione, seu veriùs calumnia Rami, ex eo ortâ, quòd Aristotelis locum minimè

mè intellexerit, discite, si placet, omnes. Hoc enim loco, si vsquam alibi, possunt asseclæ Rami, doctoris sui insignem ignorantiam perspicere, qui differentiam ὀρθῆς (quòd græcè de angulis tantùm dicitur) & εὐθείας (quod non nisi de rectis lineis) bardus homo, rem etiam tyrunculis notissimam, ignoravit. Ac nequis calumniam esse putet, audiamus ipsum, verba Aristotelis, Εἰ οὖν τις δείξειεν, ὅτι αἱ ὀρθαὶ οὐ συμπίπτουσιν, &c: interpretantem, scholarum Mathematicarum libro 6°. ad finem. Vt siquis, ait Aristoteles, interprete Ramo, quod rectæ non concurrant, Recti sc: anguli, debuit dicere, &c: & suprà, non coincidere commune est linearum rectarum, &c. Nam de Peripherijs non concurrentibus nulla οὐδὲ ὄναρ οὐδὲ ὕπαρ, apud Aristotelem mentio. Eant nunc Ramistæ, jactitentque magistrum habuisse se totius ἐγκυκλοπαιδείας peritissimum, omnibusque, quæ ad humanitatem pertinent, artibus & linguis instructissimum, qui ne tritum quidem illud & pueris notissimum discrimen ὀρθῆς, & εὐθείας noverit, quòd ὀρθὴ nunquam de rectâ lineâ dicatur, nec εὐθεῖα de recto angulo, quamvis a-

pud Latinos idem ſit Recti vocabulum ad vtrumque ſignificandum. Quam ambiguitatem vitare volentes ſcriptores Latini, præſertim veteres, pro ὀρθῇ, vel græco vtuntur pros orthas, vt Vitruvius lib. 9°. cap. octavo; vel Latino, ad perpendiculum, vt Cicero in Verrinis, & alij. Tantum igitur abeſt, vt Ariſtoteles hanc parallelarum definitionem 5° cap. primi poſteriorum reprehenderit, vt ne verbo quidem attigerit; contrà ſummè laudarit judicium Euclidis, vel potius veterum, à quibus ille ſumpſit viceſimam octavam hujus, quod non dixerint ad parallelismum requiri, vt duo interiores anguli ſint recti, cum ſatis ſit ambos duobus rectis eſſe æquales; vnum, verbi gratiâ, dimidium anguli recti; & alterum ſequirectum, hoc eſt rectum & ſemiſſem, quod eſt illo altero καθολικώτερον, ideoq; magis ex arte. Sed infinitũ eſſet hujus viri omnes ineptias perſequi. Hactenùs de definitionibus libri primi. Neq; enim omnes definitiones ad totum Geometriæ corpus pertinentes vno loco tradere voluit Euclides, optimo vſus judicio. Sunt enim aliæ definitiones præfixæ in initio

21 lib. aliæ 3°, 4°, 5°, 6°, & 7°, aliæ decimo, & aliæ 11°: aliæ in medio libri interjectæ, vt complures in decimo, ad finem quadrageſimæ octavæ ejus libri: vna aut altera, ſi benè memini, in medio propoſitionis, ob vnam & eandem cauſam hæc omnia: quòd alioqui pleræq; earum non δυσκαταίνωτοι ſed planè ἀκαταίνωτοι forent, ſi definitiones ad interiora artis myſteria pertinentes, ſtatim omnes ob oculos rudium & ἀμυήτων auditorum proponerentur. Neq; diſſimulandum etiam aliquot harum in manibus exiguum eſſe vſum in Geometriâ, vt in magnâ domo multa ſupellex, quæ non vtitur, vt loquitur ille Caſcus, emitur tamen. Iam ad poſtulata & axiomata veniamus.

POſtulata & Axiomata hoc habent commune, vt nullâ egeant demõſtratione, nullo ad probandum argumento, ſed tanquam manifeſta accipiantur, cæterorumq; deinceps omnium conſequentium principia fiant. Sic Speuſippus principia à principiatis diſtinguens: Eorum, inquit, in vniverſum, quæ mens contemplatur, partim quidem nullo

nullo peracto vario discursu producit, & ad futuram investigationem præparat, evidentioremque horũ cognitionem habet, quàm visus rerum visibilium, qualia sunt principia: partìm, cum statìm mens assequi nequeat, à principijs gradatìm transiens, & syllogismos consequentiasq; nectens apprehendere conatur, qualia sunt omnia principiata. Differunt autem postulata & axiomata, vt vult elegantissimus Geminus, ab invicem eo modo, quo problemata & theoremata distinguuntur. Postulatum ergò, ex sententiâ Gemini, est quod postulat aliquid invenire & fabricari, quod habet facilem promptamq; & cuivis obviam constructionem, τῆς διανοίας οὐ καμνούσης ὑπὲρ τῆς λῆψιν αὐτῶν, mente sc: in ijs construendis & percipiendis non laborante; quale est, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere. Axioma verò quoddam per se accidens Categoricè pronuntiat & prædicat de subjecto, ex sese audientibus cognitum, vt ignem esse calidum, vel quoddam aliud eorum, quæ manifestissima sunt: de quo quisquis dubitaverit, aut sensu eum, aut punitione e-

gere

gere oportet: quale est, si ab æqualibus æqualia demas, quæ restãt, sunt inter se æqualia: Ambo igitur oportet habere τὸ εὐληπτον, hoc est facilem comprehensibilitatem. Nam curiosiore egere structurâ vel syllogismo demonstrativo est à natura Postulatorum & Axiomatum alienissimum. Sunt autem, hoc sensu Gemini, tria tantum postulata: primum, ab omni puncto ad omne punctum &c. Secundum, rectam lineam finitam, &c: Tertium, omni centro & intervallo, &c: Cætera omnia sunt Axiomata, vel si fas cudere novum vocabulum, Axiomatoidea, id est, Axiomatum formam præ se ferentia, etsi fortasse non omnia eandem habentia evidentiam: vt omnes anguli recti sunt inter se æquales, vbi æqualitatem vt accidens per se inexistens, videmus Categoricè prædicari de omnibus angulis rectis, quod vt minùs ex se evidens syllogismo astruere conata est veterum Geometrarum curiositas, quâ tamen fortè non magno cum damno carere potuissemus. Et quidem horum trium postulatorum, Primum jubet à quolibet puncto ad quodlibet punctum rectam lineam duce-

re, quo nihil esse factu facilius, mens nostra statim assentitur. Secundum jubet rectam lineam finitam secundum continuũ indirectum producere: finitam, nam infinita produci non potest: quia infinito nihil infinitius, nihil majus animus concipere potest. Tertium jubet omni centro, & intervallo circulum describere. Quibus omnibus, vt dixi, statim & sine discursu mens assentitur, vt factu facillimis: duobus sc: prioribus ope regulæ lævigatæ, &, quantum opus est, extensæ confectis, & tertio ope circini extensi & circumducti: suntq; hæc tria postulata problematica ὑπόθεσις γεωμετρίας, hoc est planæ speculationis. Tria sunt namq;, vt hoc obiter moneam adolescentes, in Geometria problematum genera, vt videre est apud Pappum collectaneorum quarto, Plana, solida, & linearia. Quæ per rectam lineam & circuli circumferentiam solvi possunt, id est, quæ nihil vltra has tres petitiones sibi concedi postulant, Plana dicuntur: qualia sunt in his elementorum libris pleraq; omnia. Quæcunq; verò solvuntur, assumpta in constructionem aliquâ coni sectione, solida appellan-

pellantur, quia ſolidarum figurarum ſuperficiebus vti coguntur. Tertium genus lineare, in quibus lineæ aſſumuntur, quæ varium & difficilem ortum ſive generationem habent, ex inordinatis ſuperficiebus, & motibus implicatis factæ, quales ſunt Helices, Conchiliatæ, Hederaceæ, Quadratrices, & id genus. Sed ad Geminum redeamus, qui poſitis illis tribus poſtulatis, reliqua ex numero poſtulatorum expungit. Alij alitèr diſterminant poſtulata ab Axiomatibus, vt poſtulata ſint, quæ propria ſunt Geometriæ, Axiomata verò quæ communia ſunt omnis circa quotum & quantum contemplationis. Et hoc quidem ſenſu, præter illa tria Gemini poſtulata, habebimus quartum & quintum poſtulatum, vt nos excudi juſſimus, & præterea decimum Axioma. Axiomata erunt reliqua novem ab Euclide poſita. Tertia eſt opinio Ariſtotelis, qui poſtulatum & Axioma ita diſtinguit, vt Poſtulatum ſit, quod demonſtrabile quidem ſit, ab audiente q; non concedatur, tanquam principium tamen ſuſcipitur: Axioma verò ſit, quod per ſeſe indemonſtrabile eſt, omnesq; id ſuapte

ſponte & intus in animo conſiteantur, licèt etiam aliqui diſputationis gratia contra ipſum dubitârint. Et in hoc tertio ſenſu, quod Euclidi quintum eſt poſtulatum, vel ſolum erit poſtulatum, vel maximè. Hoc enim tanquam aptiſſimum exemplum Ariſtotelicæ doctrinæ explanandæ proponunt tam Themiſtius quàm Philoponus. Ex his tribus differentijs, etſi meo judicio maximè probem primam, quæ eſt Gemini, & quam fortaſſe ſequuti ſunt vulgati codices græci: Tamen quùm inde vſq; ab ætate Ptolemæi, & apud Proclum reperiantur illa duo nomine Poſtulatorum, nos Euclidis & veterum mentem ſecuti, in excudendo juſſimus ſuum eis locum reſtitui. Nam quòd Archimedes in 1° Iſorrhopicorum etiam axiomata videatur Poſtulata vocare, & alij contrà, omnia poſtulata Axiomata; quemadmodum nonnulli omnia Theoremata problemata, & omnia problemata Theoremata, hanc rerum ſuâ naturâ diſtinctarum confuſionem è ſcholis ejiciendam cenſeo.

Poſtulat. 1. Sed ad poſtulatorum explicationem redeuntes dicimus cum doctiſſimo Proclo, illud

lud postulatum, ab omni puncto ad omne punctum rectam lineam ducere, consequens esse ad eam definitionem, quæ lineam puncti fluxum esse dicit; & rectam lineam æquabilem & inflexibilem fluxum. Si igitur punctum æquabili brevissimoq; motu cieri intellexerimus, in alterum punctum incidemus, atq; ita facilè & nullo negotio primũ postulatum factum erit. Ex hoc etiam postulato sequi, inter quælibet duo puncta mediam esse rectam lineam, & punctum puncto non continuari.

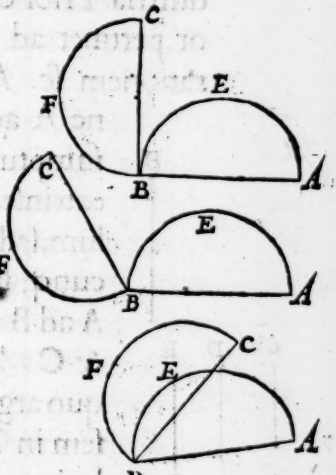
Iam quùm linea puncto finiatur, si extremum punctum intelligamus moveri, & æquabili, inflexibili, brevissimoq; motu continuari, secundum Postulatum facili simpliciq; apprehensione comparatur. *Postulat. 2.*

Quòd si rectam lineam vtrinq; finitam, manere quidem secundùm alterum sui extremum, moveri autem circà id quod manet secundùm reliquum, tertium Postulatum factum erit: ita tamen vt centrum illud & manens punctum principium sit τῶν διαστημάτων, intervalli. Non enim licet alibi centrum, alibi interuallum, ex vi hujus postulati *Postulat. 3.*

accipere. Atq; hoc loco obiectioni cuidam non levi occurrendum censeo, quî fiat, vt cùm in diuisione Philosophiæ, artes purè Mathematicas à motu & materia, saltem quoad definitionem, sejunxerimus, jam in generatione magnitudinum motum coassumamus. Respondeo in Mathematicis, præsertim magnitudinibus, esse materiam quandam, non quidem Physicam, sed Mathematicam & quantitativam. Vnde enim nisi ex materia quadam oriantur illæ diuisiones & compositiones figurarum? Et ex omnibus accidentibus, vt nostis, quantitas materiæ proximè inhæret, ex omnibus prædicamentis proximo post substantiam loco collocata. Nam de motu facilis est solutio; non Physicas esse illas motiones, sed tantùm φαντασιὰς, imaginatione conceptas; quod idem & quæri posset & responderi de situ, qui non est, nisi corporum naturalium realis, cum etiam sit suo modo quantitatum, astipulante Aristotele, magno naturæ sacerdote.

Postulat. 4. Omnes rectos angulos inter se æquales esse. Quum enim ἀπαρέγκλιτος & indeflexa incidentia rectæ in aliam rectam faciat angulum

gulum rectum, neq; recipiat magis & minùs τὸ ἀπερίκλινον, penitùs indeflexum, neutramq; in partem inclinans, omnes rectos angulos æquales esse necesse est. Hujus tamen postulati excogitauit demonstrationem qualemcunq; veterum Geometrarum curiositas. Illa verò admonitio Pappi perneceſſaria: etsi omnes anguli recti sint inter se æquales, non tamen omnes angulos rectis æquales, esse rectos. Intelligantur enim duæ rectæ lineæ A B, B C, angulum ad B rectum facientes, describanturq; super diametros A B, & B C, semicirculi A E B, B F C. Angulus A B C rectus angulis A B E, E B C simul sumptis æqualis est, totum suis partibus: sed A B E, C B F æquales, quia anguli semicirculorum æqualium. Erit ergò angulus A B C rectus æqualis angulis C B F, E B C, hoc est toti F B E lunulari æqualis: nec tamen F B E rectus, quia



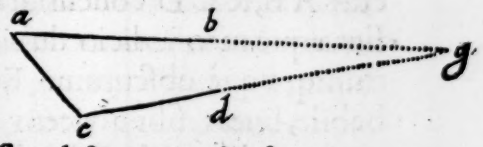
non

non rectilineus. Similitèr ſi A B, B C faciunt angulum obtuſum, aut ſi A B, B C faciunt angulum acutum, erit angulus F B E æqualis angulo A B C, neuter tamen erit acutus aut obtuſus, ſaltem definitione Euclidea, quia neuter rectilineus.

Poſtulat. 5. Si in duas rectas lineas &c.) In pulcherrimo Geometriæ corpore duo ſunt nævi, duæ labes, nec, quod ſciam, plures, in quibus eluendis & emaculandis, cùm veterum tùm recentiorum, vt poſtea oſtendam, vigilavit induſtria. Prior eſt hoc poſtulatum, poſterior pertinet ad compoſitionem rationum, rationem ſc. A ad B componi ex ratione A ad quodcunque extrinſecùs ſumptum, verbi gratiâ C, & illius extrinſecùs ſumpti ad B: neq; id ſolum, ſed procedere etiam, ſi plura vtcunq; ſumantur media: vt rationem A ad B componi ex ratione A ad C & C ad D, & D ad E, & E ad B. In quo argumento memini me (cùm eſſem in Italia, & ſciſcitaret à doctis hujus rei demonſtrationem) rogatu illuſtris & doctiſſ. viri Ioan. Vincen-

tij

tij Pinelli nonnulla meditatum esse, quæ & in chartis meis alicubi deliteſcunt, & ſucceſſor meus, ſi ei viſum fuerit, promet ad 23am, ſexti libri, vbi primum hujus lemmatis vſus eſt. Sed redeamus ad hoc noſtrum quintum poſtulatum: Si in duas rectas &c.) vt ſi in duas rectas A B, C D recta linea A C incidens faciat duos angulos B A C, D C A, interiores & ex eâdem parte A C lineæ ſimul ſumptos duobus rectis angulis minores, duæ rectæ A B, C D productæ in infinitum, hoc eſt quantum ſufficit, tandem concurrent ex parte B & D, vtpote in G puncto. Hoc poſtulatum omnes veteres Mathematici ex numero poſtulatorum, & omninò principiorum, me aſſentiente, excludunt. Nam ejus converſa duas ſc: lineas rectas A B, C D productas & concurrentes in G duos angulos G A C, G C A duobus rectis minores facere, propoſitio demonſtrabilis eſt, & demonſtrata ad decimam ſeptimam hujus. Quare vel neutrum ponendum eſt inter principia vel ambo.



Deinde & illud quæro, cum ad viceſimum octavum hujus legitimâ ſit probatum demonſtratione, cùm anguli ad B & C æquales ſint duobus rectis, rectas A B, C D non concurrere, ſed parallelas eſſe; cur hoc loco ſine vlla omninò probatione ſumatur, cùm anguli B, C, ſunt minores duobus rectis, rectas A B, & C D concurſuras: cum ambo ſint æquè meo judicio dubia: eſt enim vtrumq; æquè obſcurum. Eſt quidem probabile, lineas ſibi invicem adnuentes concurſuras aliquando, ſed non ſemper verum, vt in conchiliata liquet, & hyperbola, cum recta linea comparatis. Sed nos à ſummis magiſtris didicimus, Ariſtotele & Platone, nullam quantumvis probabilibus imaginationibus fidem adjungere in Geometrico ſubjecto. Et communis magiſter Ariſtoteles 1° Ethicorum, ſimile eſt, inquit, ab oratore demonſtrationes expetere, & Mathematicum probabilitèr diſputantem patientèr audire. Et apud Platonem in Phædone Simmias: Noui illos ſermones, inquit, qui res docere conantur per veriſimilia, ad oſtentationem eſſe comparatos, atq; adeò, ſi quis illos

los non diligentèr caverit, maximè fallant, & in Geometria & in omnibus alijs diſciplinis. Cum ergò hoc poſtulatum communibus totius antiquitatis ſuffragijs, ex numero ſit explosum principiorum, hoc nimirum theatrum fuit, hæc palæſtra, in qua ſe magna exercerent ingenia Itaq; primus, quod ſciam, admirandus Ptolemæus librum peculiarem inſtituit de demonſtratione hujus poſtulati, quem interijſſe dolendum quidem minùs eſt, quòd ejus ſummam collegerit & expoſuerit ad 29am hujus eruditiſſimus Proclus. Qui non contentus hac Ptolemæi diligentia, etiam ipſe aliam attexuit, vti retur, clariorem & evidentiorem hujus poſtulati demonſtrationem. Neq; deterruit alios horum maximorum virorum induſtria, quo minùs idem poſtea conarentur; vt Arabs quidam Anaritius, cujus hac de re tractatum olim in Germania deſcripſi: & Arabicus interpres Euclidis, ab amico meo Ioanne Baptiſta Raimondo ante paucos annos editus Romæ, quem etiam tum habebat in manibus, dum ibi eum eo familiaritèr viverem. Chriſtopherus quoq; Clavius

voluit aliquid præstare quis ad scopum propiùs collimaverit, id est, quis Geometricè maximè demonstraverit, Geometriæ professori ad 29^am^ hujus, vbi primùm vsus est hujus postulati, relinquo disceptandum. Iam enim in principio valdè foret intempestivum, & prorsus invtile, adolescentibus non intellecturis talia proponere.

LECTVRA VIII.

De Axiomatibus.

AXIOMATA vocant Stoici omnes enuntiationes simplices affirmativas. Geometræ & Aristoteles de ijs tantùm intelligunt, quæ omnium consensu sunt indemonstrabiles, quatenus scilicet ab omnibus ita se habere conceduntur, ἀξιώματα, nemine

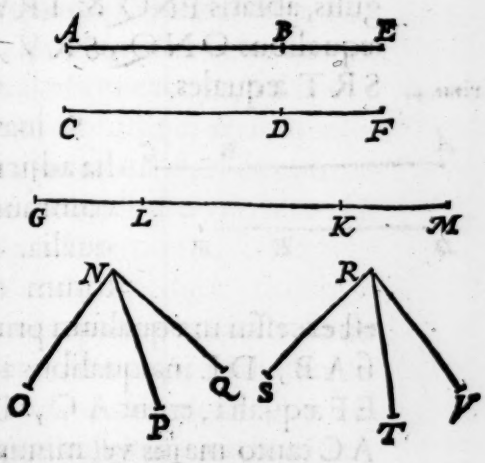
ne refragante, de propositionibus scilicet immediatis & ex sese propter earum evidentiam fidem habentibus, quæ etiam & communes notiones, κοιναὶ ἔννοιαι, dicuntur: quod insita sit & innata omnium mentibus earum notitia, domo allata, non à magistro accepta, non per syllogismum introducta, sed omni sensu, omni syllogismo superior & certior cognitio, nullâ ne inductione quidem indigens, οὐδὲ βοηθείᾳ τινὶ δεομένη, vt loquuntur de rebus, quæ vel minimo egent adminiculo, quo sustententur.

QVæ eidem æqualia, &c.) vt si lineâ A est æqualis lineæ B & linea C æqualis eidem B: A & C. inter se sunt æquales. Sive lineæ inter se conferantur, sive superficies; sive corpora, vel etiam anguli, indubitatam habet hoc axioma, vti & reliqua veritatem. Huic luci per se clarissimæ, ineptè Apollonius magnus alioqui Geometra, quasi soli meridiano lychnum aut lucernam, voluit afferre hanc, si dijs placet, demonstrationem. Si A æqualis est B, A & B eundem locum occupant, eodemq; modo C & B. ergo A & C e- *Axiom. 1.*

undem locum occupant,& proinde æquales ſunt. In hac demonſtratione duo ſumit lemmata Apollonius, vnum, quod eundem locum occupant, quæ æqualia inter ſe ſunt; alterum, quod quæ eundem occupant locum alicui tertio, inter ſe eundem locum occupant: quorum vtrumq; ipſâ concluſione minùs eſt manifeſtum, vt taceam prius eſſe manifeſtè falſum. Vt taceam hanc demonſtrationem numeris convenire non poſſe, alijſq;, quæ locum omnino nullum occupant. Nam axiomatum χαρακτῆρα ſeu characterem hunc ponit Proclus, quod non ſolum magnitudinibus conveniunt; ſed etiam communia ſint numeris, motibus, temporibus. Id quod vt magnam partem verum eſſe dem, in vniverſum tamen non eſt verum. Nam ita de numero axiomatum eijciemus 8^m, & 10^m. Communibus autem ad plures ſcientias exiſtentibus axiomatibus, vnuſquiſq; artifex ſecundùm propriæ materiæ exigentiam illis vtitur, alius vt in numeris; alius vt in temporibus: & hoc modo propriæ in vnaquâq; ſcientiâ concluſiones fiunt, licet axiomata ipſa fuerint communia.

Si

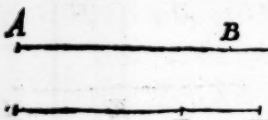
Si æqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt æqualia; sive magnitudo magnitudini æqualis addatur, sive angulus angulo. Vt si æqualibus AB CD adjiciantur BE & DF æquales, erit tota AE toti CF æqualis. Idem erit si æqualibus GL KM addatur, idem commune LK, GK & LM erunt æquales inter se. Nam si æqualia æqualibus addita faciunt æqualia, multo magis idem commune æqualibus additum faciet æqualia. Idem fiet si æqualibus angulis ONP SRT æquales anguli PNK, TRV addantur, vt sc. totus angulus ONQ toti SRV æqualis sit. *Axiom. 2.*



Si ab æqualibus æqualia auferantur (vel idem commune, vt supra dixi) quæ restant sunt æqualia. Vt ablatis ab AE CF æqualibus BE & DF æqualibus, remanebunt *Axiom. 3.*

bunt AB & CD æquales. Sic ablato à GK & LM æqualibus eodem communi LK, relinquentur GL, KM æqualia. Sic & in angulis, ablatis PNQ & TRV æqualibus ab æqualibus ONQ, SRV, reſtant ONP, SRT æquales.

Axiom. 4.



Si inæqualibus æqualia adjiciantur (vel idem commune) tota ſunt inæqualia. Addo etiam, totorum exceſſus æqualis eſt exceſſui inæqualium primò datorum: vt ſi AB, DE inæqualibus addantur BC & EF æqualia, erunt AC, DF inæqualia, & AC tanto majus vel minus toto DF, quanto majus eſt vel minus AB quàm DE.

Axiom. 5. Si inæqualibus AC, DF æqualia auferantur BC, EF reliqua AB, DE ſunt inæqualia: habebuntq; AB, DE eundem inter ſe exceſſum, quem habent tota AC, DF.

Axiom. 6. Et quæ ejuſdem (vel æqualium) dupla, ſunt inter ſe æqualia. Neq; dupla ſolùm, ſed quæ ejuſdem tripla, quadrupla, ſeu quocunque modo æquè multiplicia æqualia ſunt.

Axiom. 7. Quæ ejuſdem dimidia (ſeu alia quota pars

pars quæcunq;, vt tertia, quarta, quinta pars) inter ſe ſunt æqualia.

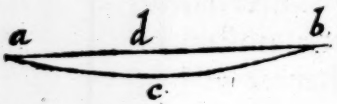
Quæ ſibi ipſis congruunt, inter ſe ſunt æqualia: τὰ ἐφαρμόζοντα. Quando ſunt duæ magnitudines, quarum alterâ alteri ſuperimpoſitâ, neutra altera m excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, ſequitur ex eo magnitudinum æqualitas. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri ſuperimpoſito, is qui ſuperponitur, alterum non excedit, neq; ab eo exceditur, quamvis latera angulum comprehendentia vel minora ſint vel majora, alia alijs, manente ſcilicet eâdem laterum inclinatione, κλίσει. Neq; enim laterum longitudo aut brevitas, vt ſæpe dixi, mutat inclinationem laterum, ex quâ ſolâ anguli quantitas determinatur. Obſeruent autem ſtudioſi adoleſcentes curioſam & obſeruatione dignam apud Geometram differentiam horum vocabulorum ἐφαρμόζειν & ἐφαρμόζεσθαι. Nam ἐφαρμόζειν & ἐφαρμόζοντα dicuntur de ſuperimpoſitis & perfectè congruentibus; ἐφαρμόζεσθαι de ſuperimpoſitis & quoquo modo coaptatis. Quam differentiam cùm non adverteret in- *Axiom. 8.*

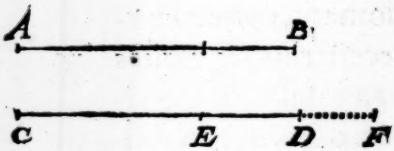
terpres noſtras, cæterò qui vir doctus, & Federicus Commandinus, vterq; lapſi ſunt in expoſitione quartæ hujus, vt ad eum locum declarabimus. Neq; tamen diſſimulandum hanc diſtinctionem in 8ª hujus non ita accuratè obſeruari, ſiue inconſtantiâ Euclidis, ſiue quod magis reor, vitio codicum, vt ibi oſtendetur. Converſam hujus quidam nobis proponunt pro axiomate, vt Clavius, cùm tamen ſit manifeſtè falſa, ſcilicet æquales quantitates & angulos ſibimet congruere, vt ſuprà in expoſitione quarti poſtulati apparuit in recto angulo & lunulari, qui licèt æquales, nunquam ſibi congruent. Idem planiùs perſpicitur in triangulis, & parallelogrammis inter eaſdem parallelas & in ejſdem vel æqualibus baſibus, quæ quamvis inter ſe æqualia, poſſunt tamen infinitis modis variari, vt non congruant; & ſimilitèr in alijs figuris infinitis; vt mirum ſit virum doctum in talem incidere potuiſſe opinionem: Non ſecus atq; olim fecit amicus & familiaris meus Franciſcus Patritius Dalmata, qui cùm vellet novam nobis exædificare Geometriam inter axiomata poſuit,

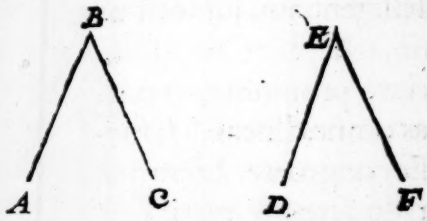
non

non ſolùm omnes angulos rectos eſſe æquales, ſed omnes angulos æquales eſſe rectos; quia, inquit, eſt converſa ſuperioris. Cui memini me dixiſſe, propoſitionem vniverſalem affirmativam per leges Logicæ noſtræ in Angliâ, non converti ſimpliciter ex vi formæ, ſed quandoq; virtute materiæ. Eſt tamen & hujus octavi axiomatis converſæ vſus in ſequentibus perneceſſarius, & veritas certa aliquouſq;. Quod annotaſſe ad ſequẽtium, præſertim quartæ & octavæ, propoſitionum clariorem intelligentiam, junioribus non vtile ſolùm fuerit, ſed planè neceſſarium. Dico igitur & clarè pronuntio, vt omnes intelligatis, rectas omnes lineas, ſi fuerint æquales, ſibi poſſe congruere. Idemque ferendum judicium de angulis rectilineis æqualibus. Et valere hanc conſequentiam in rectis lineis & angulis rectilineis, (quam Clavius putavit valere in omnibus) æquales ſunt, ergo inter ſe congruunt. Quod in rectis lineis, & rectilineis angulis levi demonſtratione ſic vtcunq; adumbrâſſe non erit inutile, hoc præmiſſo lemmatio: Duas rectas lineas in pluribus punctis quàm vno com-

municantes, eandem facere rectam lineam, nec posse alteram ab altera in quacunq; sui parte deflectere aut declinare. Sint enim duæ rectæ A D B A C B communicantes in A & B punctis: dico nulla sui parte posse alteram ab alterâ deflectere. Si enim possibile, deflectat, vt A C B; ergo duæ rectæ A D B, A C B claudent superficiẽ, quod est impossibile. Non deflectent igitur. Iam sint duę rectæ lineæ æquales AB CD, & ponatur A punctum super C, & linea A B super C D: dico B congruere in D. Si non, cadat alicubi vel citra D vt in E, vel vltra vt in F. Et in vtroq; casu vel C D & C E æquales erunt, totum parti; vel C F & C D, pars toti. De angulis rectilineis æqualibus sic constabit: sint A B C, D E F anguli æquales, ponatur B







super

ſuper E & A B ſuper E D: dico A B C angulum congruere ſuper D E F. Si enim ponatur B ſuper E, & B A ſuper D E, & angulus A B C ſuper angulũ D E F: dico B C cadere ſuper D F. Si enim vltrà vel citrà, quia anguli A B C, D E F ſupponuntur æquales, vtrobiq; totum erit æquale ſuæ parti. Maneat ergo firmum, converſam hujus octaui axiomatis in rectis lineis & angulis rectilineis veram eſſe. Neque enim niſi hoc jacto fundamento demonſtrationem quartæ hujus (quod fundamentum eſt totius Geometriæ) aut octavæ poſſe procedere. Idem quoque verum eſt in peripherijs æqualibus ejuſdem vel æqualium circulorum, & in partibus æqualibus helicis circa eundem cylindrum, vel æquales: vt ſupra monuimus. Addit Proclus pag. 64. procedere hãc ἐφαρμογὴν etiã in alijs, quæ ſunt ὁμοιδῆ .i. ſimilium partium vel ſpecierum, vt ſunt lunularia, ξυςροειδῆ, ἀμφίκυρτα .i. vtrinq; convexa. Quod ad reliquas magnitudines, niſi multis adhibitis cautionibus, trahi non debet.

Totum eſt ſua parte maius & addo omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis æquale: *Axiom. 9.*

quod tam in angulis est intelligendum quàm in magnitudinibus. Vtrobiq; enim locum habet.

Axiom. 10. Duæ rectæ lineæ spatium, aream, superficiem, non claudunt, non comprehendunt, non continent: χωρίον δ' οὐ περιέχουσι. χωρίον propriè agrum significat: quasi diceret linguâ agrimensorum, à quibus profecta est nostra Geometria, duæ sepes rectæ aut fossæ agrum nullum claudunt, non disterminant ab agris alienis, Ne mala vicini pecoris commercia lædant. Hoc axioma à junioribus adjectũ, ab Euclide non annumeratum, censet Proclus. ὃ καὶ νῦν πᾶσι, ὡς ἀξίωμα προσγεγράφθαι: cùm tamen statim ejus sit vsus in demonstratione quartæ hujus. Diximus antea duas lineas in eodem plano aut esse parallelas, quæ nunquam concurrunt, aut concurrentes. Si concurrunt, in vnico tantùm puncto communicant, ab eóq; concursu in infinitum divaricantur; atq; ita, vt earum in infinitum productarum distãtia omnem finitam magnitudinem exuperet: quo lemmate ex Aristotelis 1°. de cœlo textu. 35° desumpto vtitur Proclus ad demonstrationem 31. postulati.

lati. Nam rectarum linearum ea est natura, vt in vnico tantùm puncto communicent. Quod si in duobus vel pluribus punctis communicant, vel partem aliquam habent communem, vnica sit linea necesse est. Hujus autem axiomatis, quam Clavius demonstrationem afferre videtur ex Proclo, næ homini minimè malo fucus factus est à quopiam minimè bono, cùm neq; apud Proclũ tale extet quicquã, sitq; tota textura illius demonstrationis ridicula, neq; multo melior sit ea quã adfert Proclus ipse ad 4^am^ hujus. Hic obijciat fortasse aliquis, si duæ rectæ superficiem non claudunt, quomodo dixit Euclides in prima definitione secundi libri; Omne parallelogrammum rectangulum contineri, comprehendi dicitur, περιέχεσθαι λέγεται, à duabus rectis lineis angulum rectum comprehendentibus? Respondeo, non dixisse comprehendi, sed dici comprehendi à duabus rectis; non περιέχεσθαι, sed λέγεται περιέχεσθαι. Nam revera parallelogrammum non nisi à quatuor rectis lineis comprehenditur. Quid ergo, dicemus Euclidem falsum eo loco pronunciasse? minimè gentium, sed brevitatis

vitatis & compendij causa duarum tantùm rectarum meminisse, quia reliquæ duæ ipsis necessariò æquales erant futuræ, quælibet scilicet sibi oppositæ, neq; duabus semel positis vlla possit oriri novitas in superficie. Hactenùs de principijs ab Euclide positis: multò autem plura sunt, quibus passim & Euclides ipse, & alij Geometræ inter demonstrandum vtuntur, quæ omnia vel à præmissis principijs, vel à logica naturali ferè originem habent: qualia sunt, contradicentium perpetuò vnum esse verum, aliud falsum: ex quo & illud oritur, duas magnitudines homogeneas, itemq; angulos, aut esse inter se æquales aut inæquales, & si inæquales, alteram esse majorem, alteram minorem. Item principium illud Logicum, illud esse falsum ex quo per necessariam consequentiam falsum sequitur, cùm ex veris nil nisi verum; ex quo pendet tota vis ἀπαγωγῆς, hoc est demonstrationis per impossibile. Et hujusmodi quidem axiomatum, & aliorum generum plurima sunt exempla, quorum numerum inire difficile, quæ inter demonstrandum non animadvertentibus etiam occur-

currunt,quæ ſeorſim adnotare ſtudioſis inter legendum commodum foret. Atq; hæc in vniverſum de principijs Geometriæ: contra quæ, totamq; adeò Geometriam acriter inſurgunt duæ philoſophorum ſectæ, Pyrrhoniorum dico(qui ſceptici & ephectici)& Epicureorum. Ac Ephecticorum quidem, qui quaſi hoſtium more ex philoſophiæ agris fertilis cumprimis & fœcundæ frumenta populantes, & tanquam ſolem è mundo, ſic ex animis noſtris omnes ſcientiæ non ramos modò,ſed radicum fibras evellentes,totam evertunt philoſophiam: horum, inquam,argumenta contra principia Geometriæ perquàm levia ſanè aut planè ſophiſtica videre licet apud Sextum Empiricum.lib. 1.cap. 19. Epicureorum Geometriæ adverſantium alia fuit ratio,qui quod aſſequi non valuerunt, videri maluerunt contempſiſſe; hanc excuſationem ſuæ ignorantiæ prætendentes, τοῦτο προκάλυμμα τῆς ἑαυτῶν ἀπαιδευσίας προφασιζόμενοι,ait Sextus in præfatione. Cicero 1°. de finibus, Epicurus Polyænum familiarem ſuum Geometriam dedocuit. Et in Lucullo,Polyænus qui magnus Mathemati-

cus fuiſſe dicitur, Epicuro aſſentiens totam Geometriam falſam eſſe credidit. Et Epicuri de grege Zeno Sidonius Ciceronis præceptor in Epicureâ philoſophiâ, vt ipſe Cicero in Tuſcul. & de natura Deorum teſtatur, diverſam ab ephecticis ad evertendam Geometriam viam inſtitit: conceſſis ſc: etiam Geometriæ principijs, non poſſe tamen ea, quæ principia conſequuntur; demonſtrari, niſi quædam etiam alia ipſis concedantur, quæ in principijs præaccepta non fuiſſent. Contra quem peculiarem librum inſtituit, Pompeij magni familiaris Poſidonius Stoicus, vt erant omnes tam Stoici quàm Peripatetici & Platonici jam inde ab Ariſtotele, Platone & Zenone Geometriæ ſummi admiratores. Et Plato quidem præfixo titulo ſcholâ ſuâ arcuit omnes, qui Geometriam non didiciſſent: Ariſtoteles non vllo programmate, à ſcholâ, quod ſciam, ſed ab intelligendis libris ſuis, Mathematica vbiq; ſpirantibus omnes arcuit ἀγεωμετρήτους. Atq; hæc hactenus.

Abſoluimus, auditores, plus dimidiâ parte inſtituti noſtri, id eſt, definitionum, poſtulato-

latorum & Axiomatum primi libri expoſitionem : ſequuntur Theoremata & problemata, hoc eſt, corpus ipſum Geometriæ : vbi ſinguli apices textus Euclidei excutiendi & mente penitus comprehendendi, ijs qui ſeriò Geometriam addiſcere volunt. Monendi itaq; ſtudioſi adoleſcentes, qui cum fructu audire voluerint, vt libros cum plenis demonſtrationibus vel ſecum afferant, vel domi diligenter inſpiciant.

LECTVRA IX.

Propoſitio 1ª.

ΕΠΙ τ δθείσης &c. Super datâ rectâ lineâ : ſic enim malim, quàm in datâ rectâ lineâ.

Expeditâ principiorum & propoſitionum immediatarum ac αὐτοπίστων, ex ſeſe fidem habenti-

um,& non aliunde lucem mutuantium expoſitione,jam deventum eſt ad principiata, id eſt,propoſitiones per alia priora & notiora ſyllogiſmo demonſtrativo concludendas. Sunt autem hujuſmodi propoſitionum duo genera, problemata ſcilicet & theoremata: quæ differunt eodem plane modo, quo poſtulata (Gemini ſentẽtiam ſequendo, eiq; ſoli adhæreſcendo) ab Axiomatibus. Nam problema nobis præcipit id, quod nondum eſt,in lucem producere,conſtruere, & fabricari. Theorema verò accidens aliquod, aut propriam paſſionem de ſubjecto affirmat vel negat. Proponiturq; problema ſuſpensè, per modum quæſtionis, ζητηματος, vt ad datam rectam perpendicularem demittere: Theorema per enuntiationem affirmativam aut negativam: categoricam an hypotheticam non multùm intereſt,cùm altera in alteram facillimè reſolvatur. Ferè tamen Theoremata geometrica proponuntur ſub formâ hypotheticâ, vtpote ex dato & quæſito, vt poſtea monſtrabitur, conſiſtentia.Diſcernũturq; problemata & theoremata illis duabus ſolennibus clauſulis, ὅπερ

ἔδει

ἔδει ποιῆσαι, quod feciſſe oportuit, in fine Problematis; & ὅπερ ἔδει δεῖξαι, quod demonſtraſſe oportuit, in fine Theorematis. Neq; tamen negaverim ex omni ferè problemate poſſe Theorema effici, vt ad finem hujus oſtendetur. Plato hoc problematicum genus ex veræ Geometriæ finibus aliquo modo exterminare videtur. Verba ſunt 7° de Rep. "λέγουσι μέν που μάλα γελοίως &c. Valdè eſſe ri-
"dicula ſcribit Geometrarum vocabula,
"quæ quaſi ad opus & factionem ſpectent,
"ita ſonare videntur. Quid enim, inquit, eſt
"quadrare, niſi opus facere? Quid addere,
"producere, applicare? Cùm tamen Geo-
"metria cognitionis gratiâ ſit exercenda,
"neq; ex aliquo vſu externo, ſed ex rerum
"νοήσεως (mente ſolùm perceptibilium) intelli-
"gentiâ ſit æſtimanda. Hactenus Plato, qui totum hoc mathematicum genus eò præcipuè referri vult, & ad id vtile eſſe, vt oculum animi purget & præparet ad perceptionem τῶν νοήσεως εἰδῶν, ſpecierum intelligibilium; neq; quicquam voluit habere commercij cum rebus mechanicis & ſenſibilibus. Ideoq; teſte Plutarcho in Marcello, Archytæ & Eu-

doxo familiaribus ſuis ſuccenſuiſſe dicitur, quaſi labefactantibus & corrumpentibus Geometriæ præſtantiam & dignitatem, dum ab intelligibilibus & incorporeis rebus ad ſenſibiles & corporeas delaberetur. Hanc enim deſcenſionem ad mechanica & materiam, indignam prorſus eſſe Geometriæ ſimplicitate, quam ἀνοδον & aſcenſionem eſſe voluit ad primam philoſophiam; cùm tamen idem Plato in duplicatione cubi (quæ apud Eutocium extat in ſecundum librum Archimedis de ſphærâ & Cylindro) non dubitarit id organicè & per inſtrumentum facere, & planè mechanicè: cùm Euclidis & Geometrarum problemata à mechanicâ ſtructurâ & fabricâ abſint longiſſimè, non tam manus quàm mentis opera; & vt dixi, poſſint nullo negotio in Theoremata reſolvi. Porrò cùm Ariſtoteles, magnus naturæ interpres, tot eſſe ſpecies quæſitorum, eorum quæ quæruntur, dicat, quot ſcitorum, eorum quæ ſciuntur; magna eſt inter Geometras, ſeu potiùs contra Geometras controverſia, vtrùm in Geometria, quæ ars eſt omnium ſine controverſiâ certiſſima, hæc quatuor genera

nera quæſtionum reperiantur: an ſit, quid ſit, quod ſit, & propter quod ſit. Et quidem Amphinomus Ariſtotelem ſequutus negat Geometram quærere τὸ διότι, hoc eſt, propter quod: vt in 5ª propoſitione, exempli gratiâ, non quærunt Geometræ, propter quod anguli ab baſim ſunt æquales; ſed contenti ſunt τὸ ὅτι oſtendiſſe, ſc: quòd æquales ſunt. Et ſanè in demonſtrationibus per impoſſibile, non equidem negauerim τὸ ὅτι ſolùm oſtendi, quod ita ſit; ſed in oſtenſiuis ex tota demonſtrationis texturâ τὸ διότι colligi poſſe videtur. Et contra Amphinomum acutiſſimus Geminus exemplum adfert illuſtre. Quo modo, inquit, non eſt Geometræ quærere, quâ de cauſa in circulis quidem infinita polygona regularia poſſunt inſcribi; in ſphæra autem plura, quàm quinq; regularia corpora, inſcribere ſit impoſſibile? quod & quæſitum eſt & demonſtratum in vltimis verbis vltimi libri Elementorum Euclidis. Sed omiſſa hac quæſtione, ſpinoſá fortaſſe magis, quàm neceſſariâ, de partibus problematis & Theorematis hoc loco diſpiciamus. Omne ergo problema & theorema

ma quod perfectis ſuis completum eſt partibus, hæc ſex in ſe habet: πρότασιν, propoſitionem; ἔκθεσιν, expoſitionem; διορισμον, determinationem; κατασκευὴν, conſtructionem; ἀπόδειξιν, demonſtrationem; & συμπέρασμα concluſionem. Neq; tamen in omnibus hęc inſunt omnia, ſed maximè neceſſaria, & quæ in omnibus eſſe neceſſe eſt, hæc tria ſunt; propoſitio, demonſtratio & concluſio. Neq; tamen putavi ſex hæc generalibus definitionibus circumſcribenda, quod quidem facile factu eſſet, & eſt à diligentiſſimo Proclo factum, ſed in hac primâ propoſitione & alijs, ſi neceſſe fuerit, hæc omnia per exempla cõmonſtrabo, & quaſi per inductionem. Ac ne longè abeamus, hic propoſitio eſt, *ſuper datâ rectâ lineâ finitâ triangulum æquilaterum conſtituere*. Vbi junioribus obſervandam propono Euclidis maximam etiam in minimis loquendi ἀκρίβειαν. Notate auditores: ὅπὶ δοθείας, id eſt, ſuper datâ, & ἀπὸ δοθείας à datâ perpetuò differunt apud Euclidem, & ab eo Geometras omnes. Τὸ ἀπὸ τ̃ ς αβ εὐθείας præcisè & per compendium ſine vllâ vlteriore additione ſignificat perpetuò in Geometriâ qua-

quadratum ab α β recta, ac ſi pleniùs dixiſſet τὸ ἀπὸ α β εὐθείας ἀναγραφὲν τετράγωνον, hoc eſt, quadratum ex linea recta α β deſcriptum. Contra in triangulo æquilatero, ὅτι ἡ α β εὐθεῖα dicitur, non ἀπό. Sed illius formulæ in triangulo non tam frequens eſt vſus: in quadrato tam neceſſarius, vt ſine illius obſeruatione millies in Geometria labi neceſſe ſit; eoq; magis, quia τὸ ὑπὸ & τὸ ὑπὸ in Geometria aliud prorſus ſignificant, vt ad 4^am propoſitionem dicemus. Ignoſcetis mihi, Auditores, ſat ſcio, has minutias conſectanti. Ad interiora artis peruenientes intelligetis, quàm neceſſaria ſit harum minutiarum curioſa obſeruatio.

Supra datâ rectâ lineâ)habet omnis propoſitio Theorematica, & vt plurimum Problematica, partes duas; datum vnum vel plura; & quæſitum, probandum ſc: vel faciendum ſimiliter vnum vel plura. vt in 5^a propoſitione, datum eſt vnicum, triangulum ſc: eſſe Iſoſceles: quæſitum ſiue probandum duplex; angulos ſc: ad baſim eſſe æquales, & angulos ſub baſi eſſe æquales. In 4^a data ſunt tria: duo latera duobus lateri-

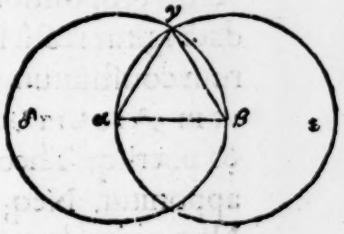
bus esse æqualia; & tertium datum, angulos comprehensos esse æquales; probanda 4^or. tertium latus tertio esse æquale, & reliquos duos angulos reliquis duobus, & aream areæ. Data dicuntur etiam hypotheses quæstionis, & sunt præmissæ positæ & præconcessæ, ex quibus infertur conclusio. Et inter demonstrandum, cùm dicitur, exempli causa, A B recta est æqualis rectæ C D ex hypothesi, intelligimus eas positas esse æquales in conditionibus & suppositione propositionis: qui certissimus est modus arguendi. Quod monendum duximus, ne, cùm audiunt hæc æqualia esse, verbi gratia, ex hypothesi, putent aliquid novum medium quærendum exterius. Quod dixi, problema vt plurimum habere datum & quæsitum, verum est ex multo maxima parte; vt in hoc quod in manibus, datur recta linea finita: quæritur, super eâ triangulum æquilaterum constituere. Sic in 4° lib. datur circulus, quęritur inscribere & circumscribere trilatera, quadrilatera & alia polygona. Ejus quod dixi; aliquando problema esse sine datis, exemplũ est insigne ad 10^am 4^ti. Invenire Isoceles

celes habens vtrumq; angulorum, qui ad basim, duplum reliqui: qualia non pauca est reperire in Arithmeticis & in decimo elementorum. In præsenti problemate datum est, recta linea finita, nisi mavis in duo diuidere, rectam lineam, & finitam. Porrò quid sit datum generaliter inter doctos nõ liquet. Euclides in libro datorũ vnãquãq; speciem ꝑ se levi definitione adumbrat. Marinus, qui Procli fuit discipulus quinq; vel sex nobis tradit definitiones Dati, quas apud eum quęrat, qui volet. Ex omnibus ibi positis nostro proposito maximè accommoda est, vt intelligamus τὸ δοθὲν, καὶ τὴν δοθεῖσαν, ἡλίκην ἄντις ἀφορίσῃ, καὶ δῷ εὐθεῖαν, id est, vt data recta linea intelligatur, quantam quis nobis desecare & assignare voluerit. Et hac simplici Dati notione, quantum ad hanc elementarem institutionem, possumus esse contenti. Sequitur πεπερασμένης, finitâ. Nam cùm ad conficiendum hoc problema & centra sumenda sunt vterq; finis lineæ datæ, & intervalla quibus circuli describantur, facile est videre infinitam lineam hic nullum locum habere, quæ nec fines habet, nec possit esse semidia-

meter circuli. Quæſitum vnicum eſt & ſimplex, triangulum æquilaterum conſtituere, non Iſoſceles, non Scalenum, qualia poſſunt eſſe ſuper eâdem lineâ infinita, & proinde ab artis conſideratione excluſa. Nam ne æquilaterum quidem fit hîc purè μοναχῶς, vt videtur Proclus innuere; id eſt vnâ ſolâ ratione, cùm in hac figurâ circulis ſeſe bis ſecantibus poſſint deſcribi non mutato plano duo triangula æquilatera, vt poſtea dicetur. Quod etiam aliquando fit, vt in ſtructurâ figuræ ad nonam hujus. Id quod à ſucceſſore meo, ſi ei videbitur, ad illam propoſitionem oſtendetur. Hactenus de propoſitione: ſequitur ex ſex partibus, quæ in problemate & Theoremate ſunt, ἔκθεσις ſive expoſitio, Sit data finita α β, quæ ipſum per ſe datum excipit & explanat, ſi quid obſcuri eſt in datis propoſitionis, & quæſtioni præparat. Sequitur διορισμὸς, determinatio, quæ duplex eſt: vel generalis poſt ἔκθεσιν, vel particularis poſt κατασκευήν: oportet ſuper ipſa α β triangulum æquilaterum conſtituere. Vt ἔκθεσις ſibi ſumit datum problematis, ita διορισμος ſeorſim quæſitum quid ſit declarat, & vtrumq; ſuam

partem

partem explanat. Sequitur 4°. loco κατασκευή, fabrica ſive ſtructura. Centro quidem α. &c. Et ex ſtructurâ, non minùs quàm ex hypotheſibus, vt dixi, & cõditionibus propoſitionis, argumenta ſumũtur firmiſſima ad faciendã cõcluſionẽ, vt ſtatim apparebit. Poteſt autem poſt ſtructuram addi alter διορισμὸς hac formâ: Dico α β γ eſſe triangulũ æquilaterũ, qui hic omittitur, in plæriſq; adjectus. De quo poſteriore διορισμῷ vidé Eutociũ ad primum Conicorum Apollonij. Quinto loco eſt demonſtratio, ibi: Quoniam igitur α centrum eſt &c. Sunt hujus primi problematis fundamenta, poſtulatum tertium bis ſumptum, poſtulatum primum bis ſumptum, definitio 15ª. bis ſumpta, & primum axioma. Iam A centrum eſſe circuli β γ δ & B centrum circuli α γ ε ex ſtructura eſt, ex eáq; ſequitur. Sexto & vltimo loco ſequitur concluſio, συμπέρασμα, quæ duplex eſt, particularis, quæ reſpondet poſteriori διορισμῷ in his verbis: Et cõſtitutum eſt



ſuper datâ lineâ finitâ α β triangulum æquilaterum α β γ; & vniuerſalis quæ reſpondet verbis propoſitionis, & priori διορισμῷ; ſuper datâ igitur rectâ lineâ triangulum æquilaterum conſtitutum eſt: quæ hic vt ſæpe aliàs, vt in 9ª.10ª.11ª.12ª. hujus omittitur. in 5ª & plæriſq; Theorematibus diſertis verbis apponitur. Neq; id non optima ratione. Neq; enim demonſtratio ſolùm procedere de hac linea ante oculos poſita, aut de his circulis hoc loco deſcriptis, ſed de quibuſcunq; alijs rectis & circulis quomodocunq; ſcribantur, ſub ſimilibus conditionibus. Hunc autem curioſum καθαιρεσιν, diſſectionem, in ſex particulas nolite dehinc à me, nolite à profeſſoribus expectare: id quod fecit non magno ſanè judicio familiaris meus Conradus Daſypodius in ſchola Argentinenſi profeſſor, vt nec multo meliore judicio idem diſſoluit demonſtrationes Euclidis in meros & puros putos ſyllogiſmos, aliquando 50 vel 60: quaſi vnquam quiſquã veterum aliquid ſcripſerit per plenos ſyllogiſmos: non Ariſtoteles, non Galenus, non Euclides aut Ptolemæus, non ſani cerebri quiſquam.

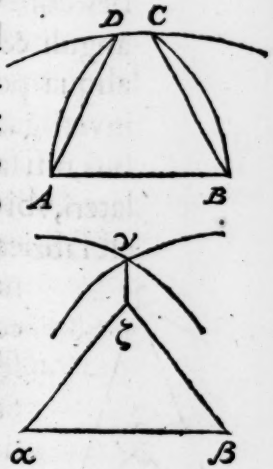
quiſquam. Sed ſatis ſit ſemel in hac primâ propoſitione exemplo & quaſi digito indicaſſe, quæ ſit cujuſq; particulæ ex illis ſex vis & natura; quod poſthac parciùs ſumus facturi. Iam his ſex partibus, vt ſpero, benè intellectis (conatus ſum certè vt intelligeretis) facile erit videre quid ſit, quod ſæpe non adhibeatur, neq; neceſſe ſit adhibere vnam aut alteram earum: verbi gratia, quia expoſitio eſt dati, vbi nullum eſt datum, quod in 10ª quarti fieri poſſe oſtendi, ibi nulla poteſt eſſe ἔκθεσις. Secundo loco vbi nulla eſt ἔκθεσις, nullus eſſe poteſt διορισμός. κατασκευή, conſtructio à problematibus vix poteſt abeſſe, ſed in plurimis theorematibus nullus eſt novæ ſtructuræ vſus, nulla vtilitas: vt in 15ª hujus & alijs. & quidem propositionem ipſam, quod mirum videatur, omittit aliquando Pappus in collectaneis, ita vt ejus locum ſuppleant ἔκθεσις & διορισμός, & cõcluſionem in pleno ſyllogiſmo & præmiſſis certis & conceſſis negligere tralatitium eſt. Iam pro vno triangulo æquilatero duo per hanc conſtructionem confici poſſe, quatenus ex vtraque rectæ lineæ αβ parte fiant

duæ

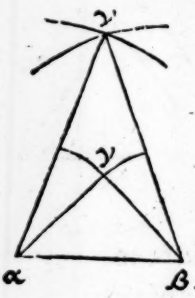
duæ circulorum interſectiones, non eſt magnoperè opus, vt moneamus auditores, vt nec de illo; ad conſtructionem trianguli æquilateri non eſſe opus integros delineare circulos; cùm parvæ quædam vtriuſq; circuli particulæ ſatis ſint ad interſectionem faciendã, ex quâ demonſtrationis tota vis dependet. Hoc loco nobis exhibet diligentiſſimus Proclus quinq; vocabulorum Geometricorum explicationem, lemmatis ſive ſumptionis; πτώσεως caſus; Poriſmatis, quod nos conſectarium vel corollarium vocamus; διορίσεως, id eſt, inſtantiæ; & ἀπαγωγῆς, vel magis propriè μεταβάσεως: quæ tum demùm explicanda cenſeo, cùm vſus eorum intervenerit, vt in proximâ propoſitione de caſu diſſerendi ſe nobis offeret occaſio. Meminiſtis à me ſuperiùs monitos ſtudioſos, multò plura principia non expreſſa ab Euclide, nec à Geometrarum vllo, inter demonſtrandum ſumi pro conceſſis & manifeſtis, dictante ſenſu communi vel Logicâ naturali: quorum hic tria vobis annotare non pigebit ad præſentis problematis demonſtrationem perneceſſaria. Primum eſt, circulos ſicut in ſtructurâ

jube-

jubetur, ductos seſe secare : quo nihil manifestius, & tamen demonstratio sine eo non procedit. Secundum est, circulos in vno tantum puncto ex vna parte se secare, nec vllam habere peripheriæ portionem communem. Nam si esset vlla pars communis, vt D C, rectæ ab A & B ductæ ad diversa communis peripheriæ puncta, vt A D B C essent quidem æquales, sed non esset necesse, vt angulum facerent, atq; ita nullum omnino fieret triangulum. Tertium est, de quo supra monuimus, rectas ab vno puncto ductas ad diversos fines statim ab illo pũcto divaricari; nec vllam partẽ lineatam habere communem: vt si γα & γβ vsq; ad ζ coirent, & deinceps solummodò seperarentur esset quidem triangulũ αζβ, sed non ἰσόπλευρον, quia non αζ & βζ per definitionẽ circuli sunt æquâles rectæ αβ, sed αγ & βγ. Quam ansam arripuit Epicuri de grege Zeno Sidonius ad evertendum hoc problema, totámq; adeo Geometriam, cujus cavillationibus respon-



ſum eſt eruditè à Poſidonio, quam confutationem non eſt neceſſe vobis exhibere, ſi ſemel animis veſtris altè inſederit illa noſtra ſententia de multis principijs ſubintellectis, nuſquam expreſſis, eandem tamen cùm veritatem, tùm evidentiam cum expreſſis habentibus. Adjungunt hoc loco Proclus & Arabes cum Campano ſtructuram Iſoſcelis trianguli & Scaleni, ac de Iſoſcele quidem aliqua poteſt eſſe probabilis ratio cur eam inveſtigarent, quod nunquam in ſequentibus, niſi fallor, vſus eſt aliquis trianguli æquilateri, vbi non ſatis ſit fuiſſe Iſoſceles: cujus eſt fabrica ſimpliciſſima. Sit enim recta linea $\alpha\beta$, centriſq; α & β intervallo eodem quocunq;, quod plus ſemiſſe ſit $\alpha\beta$ rectæ, vt poſſit fieri interſectio peripheriarum, ducantur circuli ſe interſecantes in γ, & à puncto γ ducantur rectæ $\alpha\gamma$ $\beta\gamma$, factum eſt quod quæritur Iſoſceles. Scaleni confectionem, vt infinitè variabilẽ, adeóq; ab arte alienam, nulliúſq;, quod ſciã, vſus in Geometriâ, vt invtilem prorſus & otioſam aſpernor. Supra dixi mihi videri omne



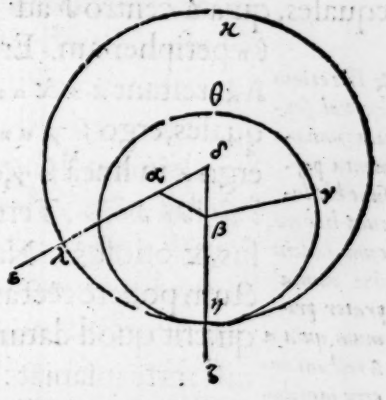
ne problema posse in Theorema resolvi: vt si quis dicat in præsenti problemate; si duobus punctis finientibus rectam vt centris, intervallo ejusdem lineæ, circuli duo scribantur, & ab intersectione duæ rectæ ducantur ad puncta finientia; descripta figura triangulum est æquilaterum. Postremò monendi Adolescentes problema non hîc accipi, vt apud Dialecticos in Topicis, pro omni quæstione propositâ in quocunq; subjecto, sed pro eo quod proponitur faciendum & fabricandum in subjecto Geometrico.

Ad datum punctum datæ rectæ lineæ, (πεπερασμένης intellige, finitæ) æqualem rectam lineam ponere. Hujus problematis fundamenta sunt hæc septem, 1. primum postulatum. 2. præcedens problema, vt sunt omnia antecedentia vice principiorum ad sequentia. 3. secundum postulatum bis sumptum. 4. Tertium postulatum bis sumptum. 5. definitio 15ª. bis sumpta. 6. Tertiũ axioma. 7. primum axioma. Quam particularem citationem nolite posthac expectare, cùm nemo, quod sciam, veterum Græcorum vnquam inter demonstrandum nominatim citaverit *Propos.* 2 *

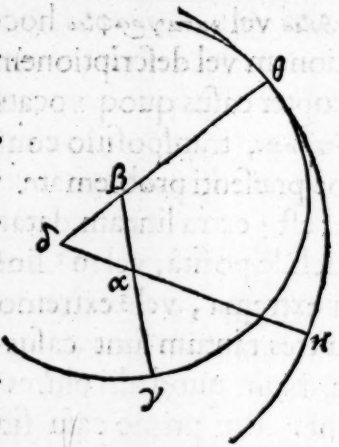
taverit prædemonſtrata vel à ſe vel ab alijs, præter Archimedem διὰ τὸ δεύτερον τοῦ πρώτου τῶν Ευκλείδου, qui citat, ſi codex non eſt, vt eſt, vitioſus, tertiũ hujus (libri excuſi Archim: falſo habent ſecundum) in re leviſſimâ & quidem minus aptè, imò planè ἀπροσδιονύσως, nec ad rem; cùm Euclidis propoſitio ſit de rectis lineis tantum & in Archimede ſit vſus magnitudinum generaliter, vt veriſimillimum ſit hanc citationem eſſe ab ipſis librarijs non ab acutiſſimo & ſubtiliſſimo Archimede, quem Hieronymus Cardanus, ſi bene memini, in principem ſenatus ſubtilium ingeniorum legit. Et tamen hanc citationem Archimedeam videtur agnoſcere alicubi Proclus, vt neceſſe ſit hanc maculam, ſi verè eſt, vt puto, macula, in codices Archimedeos olim irrepſiſſe. Quod ſupra monuimus ex Proclo περὶ πλώσεως de caſu, hic locum habet. Nullum eſt enim ferè in Geometriâ problema, quod pluribus caſibus luxurietur, vt quibuſdam placet. Caſus, diverſos conſtructionis modos pollicetur, & ſitus mutationem punctis tranſpoſitis, aut lineis, aut planis, ſolidiſvè. Et proſſus omnis caſuum varietas circa κατα-

σκευὴν

σκευὴ vel καταγραφὴ hoc est circa constructionem vel descriptionem, cõspicitur. Quapropter casus quoq; vocatur πτῶσις, quasi μετάπτωσις, transpositio constructionis, vt in hoc præsenti problemate. Punctum datum vel est [1] extra lineam datam, vt in figurâ ab Euclide positâ, vel in [2] lineâ datâ alicubi inter extrema, vel [3] extremorum alterum erit. Ita tres tantum sunt casus huius problematis. Nam quod alij plures afferunt; frustra sunt. Pro primo casu sit punctum datum α, & data recta βγ, oportet ad punctum α, ponere rectam æqualem rectæ βγ. Ducatur ab α puncto ad punctum β recta αβ, & super eam constituatur triangulum æquilaterum δαβ, & proijciantur in rectum ipsis δα, δβ rectæ αε, βζ, & centro β intervallo βγ describatur circulus γηθ, & rursus centro δ intervallo δη describatur circulus ηκλ.



Pro ſecundo caſu; ſit α punctum datum in lineâ βγ inter β & γ. Et fiat triangulum æquilaterum βδα, & producantur δC, δα, quantum opus eſt. Centróq; β, intervallo βγ, ſcribatur circulus γθ, centróq; δ, intervallo δθ, circulus θη. βθ βγ æquales, quia à centro β ad circumferentiam γθ. & δθ δη æquales, quia à centro δ ad θη peripheriam. Ergo ablatis æqualibus δβ, δα reſtant βθ & αη æquales. Sed Cθ βγ æquales, ergo βγ αη æquales. Ad punctum ergo α in lineâ βγ, data eſt αη æqualis τῇ δβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Tertius caſus invtilis eſt prorſus & otioſus. Nam qui quærit ad β punctum ponere rectam æqualem τῇ βγ rectæ, quærit quod datum eſt, quod nemo faceret niſi forte inſaniat. Nam ipſa βγ hoc officium præſtat. Sed quid opus eſt, inquiet aliquis, tanto apparatu, tot caſibus? Annon licebit centro α, puncto dato, intervallo æquali τῇ βγ circulum deſcribere, atq; ita ab α ad peri-



* *Illa etiam ſex vel ſeptem fundamenta poſſunt hic locum habere, cum eadem ſint omnia præter primum, quia α β rectam ducere iam ductam otioſum eſſet.*

peripheriam æquales ducere? Hoc enim & nunc & olim huic problemati obiectum est. Respondet Proclus verissimè, hoc nihil aliud esse, quàm meram petitionem principij. Nam qui petit vt ad α describatur circulus interuallo βγ, petit vt ad α punctum ponatur linea rectæ βγ æqualis, quod fuit demonstrandum, non petendum. Neq; is est sensus tertij postulati, vt centro & interuallo quocunq; ducatur circulus, nisi posito centro in principio interualli, non exteriùs sumpto. Quâ de re memini me monuisse Auditores in expositione. 3^i. postulati. Atq; hîc obseruent studiosi, si placet, differentiam magnam in hac parte inter problema & theorema. In problemate, vbi quasi manuális operatio requiritur, trajectio linearum ad alium atq; alium situm & positionem admitti non potest: Potest in theoremate, vbi nullum opus exigitur, per imaginationem traijci linea aut figura à suo loco, & superponi alteri lineæ vel figuræ, vt in quarta propositione fit. Nam quia in theoremate nihil aliud quæritur, quàm verum & falsum, neq; quicquam est falsum in illâ trajectione, quæ per

solam

ſolam imaginationem ad oſtendendam concluſionis veritatem fit, & non quaſi per fabricam manualem, aut miniſterium aliquod problematicum, recepta eſt jure merito in theoremate trajectio illa imaginaria, quæ in problemate eſſet vitioſiſſima. Quod diſcrimen cùm non adverterent vir doctus & Nobilis Fluſſas Candalla, itemq; ſi bene memini, alij, cùm pro demõſtratione Euclideâ, quam reijciunt, nihil ſani aut ſolidi ſubſtituerent, ſuos nobis obtruſerunt paralogiſmos & pſeudographias, vt de Candallæ demonſtratione ad 4^am^. oſtendetur.

Propoſit. 3^a^. Datis duabus rectis lineis à majore minori æqualem abſcindere.) In hoc problemate, vtendo adminiculo proximè antecedentis, nulla eſt difficultas, neq; vllæ ſunt hic τρόπων varietates, præter eas quæ in præcedente expeditæ ſunt. Nam punctum α poteſt ſimiliter ſumi extra rectam γ. vel in vno extremorum lineæ γ, vel alicubi inter extrema. In quibus omnibus caſibus, cùm per antecedentem doceamur ad α punctũ, rectæ γ rectam lineam æqualem ponere, centro α & linea ſic poſita, intervallo ſi circulus

culus per tertium postulatum scribatur, factum est id quod in hoc problemate requiritur; vt ab α β majore minori γ æqualis abscindatur. Scio à viris doctis septem vel octo casus poni hujus problematis, sed frustra dico fieri per plura, quod fieri potest per pauciora. Et in tantâ casuũ varietate luxuriari, non est aliud, quàm lectorem non necessariâ varietate confundere. Nam certum est & ex sufficienti divisione, punctũ α non posse plures positiones habere, quàm tres, vt in præcedente problemate ostensum est.

LECTVRA X.

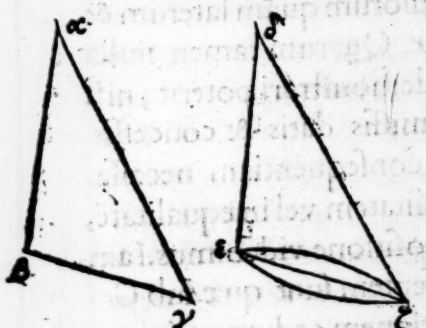
Propoſitio 4ª.

Ἐὰν δύο τρίγωνα, &c. Ventum eſt ad Theorema primum, & quartam propoſitionem, quæ baſis eſt & fundamentum totius Geometriæ, eóq; diligentiùs à nobis examinanda, & ſinguli ejus apices excutiendi. Itaq, tironibus hanc præ omnibus vnà cum ſequente commendo diligentiſſimè perpendendam. Qui enim harum duarum propoſitionum demonſtrationes, earumq; texturam animo firmitèr comprehenderit, is non minimam Geometricarum difficultatum partem devoraverit. Attendite igitur.

Si duo triangula.) Hujus doctrinæ elementa-

mentaris, quæ est de Triangulis, subjectum est aliquando vnum Triangulum, vt in propositione 5ª, 6ª, 16ª, 17ª, 18ª, 19ª, 20ª, 21ª, 32ª, & 48ª: aliquando duo triangula, vt in præsenti 4ª, 8ª, 24ª, 25ª, & 26ª. σύμπτωμα, accidens siue propria passio, quæ de subjecto demonstratur, est, vt dixi, in hoc primo libro æqualitas & inæqualitas (siue majoritas & minoritas) tam angulorum quàm laterum & superficici contentæ. Quarum tamen nulla passio de subjecto demonstrari poterit, nisi ex quibusdam præmissis datis & concessis, quæ inducant, per consequentiam necessariam, dictam æqualitatem vel inæqualitatẽ, vt mox in hac propositione videbimus. Iam in omni triangulo septem sunt quæ sub Geometriæ considerationem cadunt: tria latera, tres anguli, & ἐμβαδὸν siue χωρίον, area, spatium vel superficici comprehensæ ab illis tribus lateribus quantitas. Ex his septem, æqualitas trium ferè inducit æqualitatem quatuor reliquorum. Ferè dico, quia hoc non semper fit, sed vel quartum aliquod requiritur, vel saltem aliquod ex tribus limitatum & quasi conditionatum. Cuius rei hæc quarta

propoſitio inſignia nobis prębebit exempla. Hîc ergo ſubjectum eſt, vt dixi, duo triangula: data, ſiue hypotheſes, & conditiones requiſitæ ad demonſtrationem abſoluendam ſunt hæ: vt ſint duo latera vnius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia. Neq; enim requiritur, nec ad rem pertinet, vtrum, exempli cauſa, in triangulo α β γ latus



α β æquale ſit vel inæquale lateri β γ; ſed α β in triangulo α β γ debet eſſe æquale δ ε in triangulo δ ε ζ. Atq; hæc eſt prima hypotheſis, conditio ſiue datum. Sequitur ſecunda, vt α γ latus ſit itidem æquale δ ζ lateri. Porrò quod addit Euclides ἑκάτερα ἑκατέρᾳ, quod vertunt, alterum alteri, hoc eſt, ſingula ſingulis vel ſigillatim, hanc vim habet, vt intelligamus non ſatis eſſe ſi ambo α β, α γ conjuncta ambobus δ ε, δ ζ, vel ſimul ſumpta ſimul ſumptis ſint æqualia (nam ex hac ſuppoſitione nihil concluditur,

vt

vt postea dicetur) sed debent esse bina binis sigillatim æqualia. Ex his etiam duabus hypothesibus, quantumvis rectè intellectis, nihil sequitur ad æqualitatem concludendam, nisi etiam addatur tertium datum, hypothesis vel conditio: nimirum, habeant autem & angulum angulo æqualem: neq; tamen id omni modo satis est, sed oportet angulum angulo esse æqualem, qui ab æqualibus rectis lineis continetur. Vt in superiori exemplo, datis α β α γ sigillatim æqualibus lateribus ♪ ε ♪ ζ, si supponimus angulum ad β æqualem esse angulo ad ε, nihil reliquorum necessariò sequitur. Quia necessariò requiritur ad conficiendam hujus propositionis conclusionem, vt anguli comprehensi lateribus, quæ supra posita sunt æqualia, inter se comparentur, quoad æqualitatem, non alij. Atq; ita habetis tria data siue hypotheses & conditiones hujus propositionis expositas. Hoc tamen nouitijs annotâsse non erit fortassis inutile ad sequentium propositionum intellectum, idem quod hîc Euclides dicit de æqualitate laterum aut angulorum, sequi multo magis in identitate: vt si duo trian-

gula habent vnum latus vni lateri æquale, & alterum idem & commune, vel si angulus comprehensus sit vtrobiq; idem & communis, vt mox in quinta videbimus, multò fortiùs sequetur æqualitas reliquorum. Cujus vtriusq; rei dabimus exempla post explicatam Euclidis demonstrationē. Atq; hæc de datis. Sequuntur quatuor quęsita siue πρόβλημα demonstranda, quorum primum est, Basis basi erit æqualis, hoc est tertium latus tertio lateri. Quamvis enim in populari vsu & consuetudine forensi, Basis aliquid imum significet, vt basis columnæ apud Vitruvium, basis statuæ aut trophæi apud Ciceronem & alios, pro infimâ parte cui insistit columna, sive statua; tamen ex vsu Geometrarum Basis in triangulo nihil aliud est, quàm cùm priùs nominata fuerint duo latera, id quod restat tertium; siue imum obtineat locum, siue medium, siue supremum. Atq; hoc est primum ex demonstrandis siue quæsitis. Sequitur secundum: & triangulum triangulo æquale erit, id est, superficies vnius trianguli superficiei alterius trianguli erit æqualis. Nam triangulum non est tria latera, multo-

que

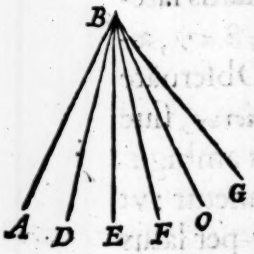
que minùs tres anguli, ſed ſuperficies illa plana, quæ tribus illis lateribus continetur, vt in definitionibus patuit. Sequuntur alia duo ex demonſtrandis, ſcilicet & reliqui duo anguli reliquis duobus angulis, alter alteri: (Cujus phraſeos intellectum ſupra habuiſtis.) Qui quibus? Declarat adjecta conditio, quibus æqualia latera ſubtendunt, vel ad verbum ſub quos æqualia latera ſubtendunt; vt in triangulis α β γ, δ ε ζ, quia α β poſita eſt æqualis rectæ δ ε, ſignificatur illos angulos eſſe æquales, qui ſunt ad γ & ζ. Oppoſiti ſcilicet lateribus α β, δ ε. Et ſimiliter angulum ad β æqualem eſſe angulo ad ε, oppoſitis ſcilicet lateribus α γ, δ ζ æqualibus exiſtentibus. Et obſervandum eſt potiùs ab æqualitate ſubtenſorum laterum, quàm ab æqualitate comprehendentium, æqualitatem denotâſſe angulorum; quia duo ſunt latera comprehendentia, quod in oculos difficilius incurrit, cùm tantùm vnicum ſit ſubtenſum, quod facilius mente cõcipitur. Neq; tamen ſatis eſt, aut magnum aliquid facit ſubtenſorum laterum æqualitas ad concludendam æqualitatem angulorum, niſi reliqua

qua concurrant : Sed hæc quaſi nota tantùm adjecta eſt, vt intelligatur quis cui comparetur in hac propoſitione angulus quoad æqualitatem. Verbi gratiâ, angulus ☾ æqualis eſt angulo ∈, quia duo latera ſunt æqualia & angulus comprehenſus : Sed ita facillimè, vt dixi, mente comprehendimus, & primo aſpectu videmus, quis angulus cui comparetur quoad æqualitatem, vt diximus. Et notanda eſt duplex hæc formula verborum apud Euclidem, ἡ πλευρὰ ὑποτείνει τὴν τῆς γωνίας (latus ſubtendit ſub angulo, vel vt vertunt alij, ſubtenditur angulo :) qua vtitur in hac quartâ, & 19ª huius, & in 4ª, 5ª & 6ª ſexti, & ἡ πλευρὰ ὑποτείνει γωνίαν, (latus ſubtendit angulum) vt in 18ª & 47ª huius, eodem vtrobiq; ſenſu, ſed diverſo enuntiandi modo. Sic habetis in hac ſolâ propoſitione ſeptem illa quæ in triangulo à Geometrâ conſiderantur, ex quibus trium æqualitas, ſic vt prædictum eſt, limitata inducit ex neceſſitate æqualitatem quatuor reliquorum. Explicatis in hunc modum verbis propoſitionis, ad reliquam accedamus demonſtrationem interpretandam. Conſiſtit autem vis tota hu-

jus

jus propositionis vnico ferè fundamento, sc: octavo axiomate & ejus conversa. Τὰ ἐφαρμόζοντα, congruentia sunt æqualia; & æqualia congruunt, ἐφαρμόζει. Sequitur ἔκθεσις, expositio, quæ secunda est ex sex partibus su-
"pra memoratis. Sint duo triangula αβγ
"δεζ habentia duo latera αβ, αγ æqualia
"duobus lateribus δε, δζ alterum alteri, sc:
"latus αβ æquale lateri δε, & αγ latus late-
"ri δζ, & angulum, γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν βαγ, æ-
"qualem angulo τὴν ὑπὸ δεζ. Obseruate
"Auditores, peculiarem vsum ἐκθέσεως, siue expositionis, vt si quid est in datis ambiguum vel obscurum, in ἐκθέσει explanetur: vt hoc loco ἐκάλεσεν ἐκάλεσα explanatur per latus sc: αβ æquale lateri δε, & latus αγ lateri δζ, quod idem officium præstat in quæsitis explanandis διορισμὸς siue determinatio. Et quidem in septima hujus absq; hac explanatione esset, verba illius propositionis, vt sunt obscurè nimis tradita, nemo, vt opinor, intelligeret, quantumvis Græcæ linguæ peritus. Cùm hanc ἔκθεσιν siue expositionem intueor, libet admirari Scheubellij cujusdam ineptias dicam, an amentiam qui contra

omnem antiquitatem, contra exemplum omnium Geometrarum ab orbe nato, Euclidis, Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, Pappi, contra Aristotelem ipsum, ἄνευ γραμμῶν, sine literarum & Alphabeti vsu, voluit nobis rerum mathematicarum γραμμικὰς ἀποδείξεις obtrudere. Quid faciet miser homo, quo se vertet, si vsus venerit in appositâ figurâ anguli E B F? Quomodo nobis ex tot angulis ad B seliget angulum à B E, B F rectis comprehensum? Sed eo misso, in hac expositione notent adolescentes studiosi Geometriæ formulam verborum, quâ Geometræ angulum designant:



ἡ ὑπὸ α β γ. dixi supra τὸ ἐπὶ α β εὐθείας & τὸ ἀπὸ α β εὐθείας apud Mathematicos semper accipi in sensu planè diverso: vt τὸ ἐπὶ significet triangulum æquilaterum, συσταθὲν constitutum super α β rectâ: τὸ ἀπὸ α β significet quadratum ab α β recta descriptum ἀναγραφὲν. Hic verò multò magis obseruanda proprietas, vt sunt mathematici formularũ suarum tenacissimi, quid sit ἡ ὑπὸ β α γ & quid τὸ ὑπὸ β α γ, vel vsitatius τὸ ὑπὸ β α α γ.

Formu-

Formula igitur illa, ἡ ὑπὸ β α γ, nunquam niſi de angulo dicitur: ἡ ὑπὸ β α γ vel ἑα α γ nunquam, niſi de parallelogrammo rectangulo. Et vt redeamus ad priorem (nam poſteriorem explicabit ſuo, vt ſpero, loco, hoc eſt ad initium ſecundi libri, profeſſor Geometriæ) ἡ ὑπὸ β α γ eſt elliptica vel compendiaria formula deſignandi angulum. Plenum eſt, ἡ ὑπὸ β α α γ δ'θείων περιεχομένη γωνία: hoc eſt angulus à rectis ἑα α γ lineis comprehenſus. Inde breuitatis cauſa eliſo altero α, quia bis deinceps reperitur, dicitur angulus ὑπὸ β α γ præciſe, & breuitatis, vt dixi, & compendij cauſa. Cujus formulæ cauſam & originem cùm ignoraret Zambertus, Campanus & tota barbarorum cohors, etiam recentiores, vt Anglicus interpres, vir alioqui doctus & alij ferè omnes, præter Commandinum, verterunt πλὴν ὑπὸ β α γ γωνίαν, angulum ſub β α γ: neſcientes ſc: ex vſu Græcæ linguæ ὑπὸ cum genitiuo poſt verbum paſſiuum (nam cum accuſatiuo alia eſt ratio) vertendum per à vel ab: vt τῶν ὑπ' ἐκείνης πάσχει): hoc ab illo factum eſt, ſequendo regulas puri Helleniſmi. Hanc

minutiam pœnè puerilem operæpretium erit junioribus obſeruâſſe, quæ lucem magnam inferet lectioni veterum, in quibus omnibus eadem perpetuò loquendi formula retinetur. Commandinus angulum βαγ vocat, non male; quâ etiam formulâ & nos deinceps, vt plurimùm, vtemur. Græca ad verbum ſonant angulum à βαγ ſc: comprehenſum. Hæc de ἐκθέσει ſive expoſitione datorum hujus propoſitionis, quæ 2ª pars eſt Theorematis. Sequitur tertia, διορισμὸς, determinatio quæſitorum, ſcilicet, & demonſtrandorum.

"Dico, quod etiam baſis βγ baſi εζ æ-
"qualis erit, & αβγ triangulum triangulo
"δεζ æquale erit, & reliqui duo anguli re-
"liquis duobus angulis æquales erunt, alter
"alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur:
"hoc eſt αβγ angulus angulo δεζ (nam
"his angulis ſubtenduntur æqualia latera
"αγ δζ) & αγβ angulus angulo δζε,
"quibus ſc: αβ δε æqualia latera ſubten-
"duntur.

Quarta pars Theorematis, κατασκευὴ, id eſt, fabrica, vel ſtructura, quæ hic nulla eſt.

Quinta

Quinta pars demonſtratio, quæ non magis abeſſe poteſt ab vllo Theoremate, quàm cor à corpore. Ἐφαρμοζομένου τοῦ αβγ τριγώνου, id eſt, accomodato vel applicato αβγ triangulo, &c. Vbi alia & ſubtilis quædam diſtinctio notanda apud Euclidem inter ἐφαρμόζειας & ἐφαρμόζειν, à doctioribus recentiorum Mathematicorum verba ſolum græca attendentibus neglecta. Nam Campanus, Clavius & alij, ſenſum ſecuti, non ſonum & ſimilitudinem græcorum vocabulorum, hoc loco non errârunt. Confidenter dico ἐφαρμοζομένου hoc loco non eſſe, vt vertit Commandinus, Triangulo αβγ congruente ipſi δεζ: neq; vt noſter vertit. *The Triangle αβγ exactly agreeing with the Triangle δεζ* (hoc enim probandum & concludendum in fine, non ſumendum ſtatim à principio) ſed ἐφαρμοζομένου τοῦ αβγ τριγώνου eſt applicato αβγ triangulo, vel per imaginationem tranſlato αβγ triangulo ad ſitum δεζ trianguli, & ſuperimpoſito altero alteri, ſiue perfectè congruant inter ſe, ſiue non. De quâ differentia memini me paucis ſupra meminiſſe. Nos itaq; more noſtro verba demonſtratio-

nis interpretantes dicamus : Superpoſito
" (ἐφαρμοζομένου) triangulo α β γ ſuper trian-
" gulum δ ε ζ, & poſito α puncto ſuper δ, &
" α β recta ſuper δ ε rectam, congruet (ἐφαρ-
" μόσει) β punctum ſuper ε punctum, eò
" quòd α β recta æqualis ſit δ ε rectæ. Quo-
modo autẽ hoc ſequitur, aut ex quo princi-
pio deducitur, ſi duæ lineæ rectæ ſint æqua-
les, & vnus terminus vnius ponatur ſupra
vnum terminũ alterius, & recta ſuper rectã,
alter terminus alteri termino congruet? Ve-
rum quidem eſt, ea quæ ſibi invicem con-
gruunt, eſſe inter ſe æqualia, ſemper & in
omni caſu, per octauũ axioma: ſed converſa,
ſc: æqualia ſibi ἐφαρμόζειν, neq; ponitur ali-
cubi inter principia, neq; vera eſt, niſi cum
illis limitationibus & reſtrictionibus (quas
ſupra ad octauũ axioma diximus, in rectis li-
neis ſc: & rectilineis angulis) quæ reſtricti-
ones etiam hîc locum habent. Quid ergo?
Proclus, vt ſe hac difficultate expediret, ſuam
quandam novam adhibet definitionem æ-
qualium rectarum. Recta, inquit, linea alij
rectæ lineæ æqualis eſt, cum earum extrema
conjuncta totam toti congruere fecerint.

Nam

Nam omnis recta linea omni rectæ lineæ congruit: æquales autem juxta etiam extrema ſibi congruunt. Sed hæc definitio nova eſt, nec vſpiam apud Euclidem reperta. Teneamus ergo, quod ſupra dixi, & ad octavũ axioma aliquo modo demonſtraui, rectas lineas æquales & rectilineos angulos æquales ſibi congruere. Sed ad reliquam demonſtrationem pergamus.

"Cum ergo recta α β rectæ ∠ ε congru-
"at, & α γ recta rectæ ∠ ζ, quia angulus ζ α γ
"æqualis eſt angulo ε ∠ ζ, ergo & γ pun-
"ctum puncto ζ congruet.

"Sequitur: Quare & baſis β γ congruet
"baſi ε ζ. Si enim ζ congruente ſuper ε, & γ
"ſuper ζ, baſis β γ baſi ε ζ non cõgruit, duæ
"rectæ lineæ ſuperficiẽ claudent, quod eſt
"abſurdum. Congruet igitur baſis β γ baſi
"ε ζ, & æqualis erit per octavum axioma
"directè ſumptum, quod eſt vniverſaliter
"verum. Sequitur:

Quare & totum triangulum α β γ toti tri-
"angulo ∠ ε ζ congruet (nam omnes anguli
"& omnia latera congruunt) & æquale ipſi
"erit: & reliqui anguli reliquis angulis con-

gruent

"gruent & æquales inter ſe erunt, ſc: angu-
"lus α β γ angulo δ ε ζ (ſubtenſi æqualibus
"lateribus α γ, & δ ζ) & angulus α γ β angu-
"lo δ ζ ε, ſubtenſi æqualibus lateribus α β &
"δ ε. Sequitur ad extremum concluſio,
"verba ipſa propoſitionis repetens.

Si ergo, &c. Cui præponi potuiſſet particularis concluſio, verbis ſc: διοεισομεν repetitis. Ergo in triangulis α β γ, δ ε ζ baſis β γ baſi ε ζ &c. quam elementator prætermiſit, vt ſupervacuam. Porrò demonſtrationem hujus Theorematis plæriq; repudiârunt, vt minimè Geometricam, eo quod mechanicum quiddam ſapere videatur, triangulumq; aſſumat cum motu, & quaſi loco ſuo emotum & ad aliam tranſlatum poſitionem, quod Geometriæ videtur minimè convenire, quæ ſine motu & materia res contemplatur: in eaq; opinione eſt Fluſſas Candalla, nobilis Gallus, vir alioqui doctus. Cujus monitum, ſi placet, audite; demonſtrationem ſtatim excutiemus. "Alteram, inquit
"ille, demonſtrationem huic quartæ exhi-
"bere cogimur, ne præbeatur aditus, quo il-
"la mechanicorum vſuum inſtrumenta in

demon-

" demonstrationes incidant. Nam Campa-
" nus & Theon hanc demonstrantes, Trian-
" gulum triangulo superponunt, angulumq;
" angulo siue latus lateri, demonstrationem
" potiùs instrumento palpantes, quàm rati-
" one firmantes, quod tanquam prorsus ali-
" enum à vero disciplinarum cultu rejicien-
" tes, aliam demonstrationem absq; figuræ,
" anguli, seu lineę transpositione protulimus
" ratione fundatam. Hactenus Candalla.
Proclus etiam fatetur hanc ἐφαρμογὴν, super-
positionem, idem triangulum diversis in lo-
cis situm accipere, & omnino sensibili inniti
notioni, τῆς αἰσθητῆς ἔχεσθαι ὑπολήψεως. Et certè
positionis mutationem in fabricâ problema-
tum ad finem secundæ reiecimus, vt petitio-
nem principij, nec in problematibus quidē
vllo modo tolerabilem. Exempli causa, in
23ª hujus libri, ad datam rectam lineam, &
ad datum in ea punctum, dato angulo recti-
lineo æqualem angulum rectilineum con-
stituere, si superpositione angulorum vti li-
ceret, quid opus esset vllâ curiosa structurâ
vel demonstratione. Imò quid opus esset ta-
li propositione? Sed in Theorematibus hoc

non ſolùm tolerabile eſt, ſed planè neceſſarium, præſertim in ijs propoſitionibus, quæ proximæ ſunt principijs, & paucas habent præmiſſas. Sic etiam Archimedes vtitur, nec in planis ſolùm, vt in libris Iſorrhopicorum, ſed etiam in ſolidis, vt in libro de Conoidibus & Sphæroidibus. Sed ipſum, ſi placet, Candallam loquentem audiamus. Sint tri-
"angulorum αβγ ∧εζ duo latera αβ αγ
"duobus ∧ε ∧ζ æqualia, inſuper anguli
"βαγ ε∧ζ ſint æquales: dico baſes βγ εζ
"æquales eſſe: & reliquos qui ad β & γ an-
"gulos reliquis qui ad ε & ζ æquales eſſe.
Sequitur Candallæ nova demonſtratio, quam perſpicuitatis cauſa in quatuor par-
1ª teis divido. Quoniam per hypotheſim
"æquales ſunt αβ & ∧ε rectæ, diſtantia ſig-
"norum α & β diſtantiæ ſignorum ∧ & ε
"convenit. Nec non quia æquales ſunt αγ
"& ∧ζ rectæ, diſtantia ſignorum α & γ di-
"ſtantiæ ſignorum ∧ & ζ conuenit.
2ª "Rurſus quia æquos angulos compre-
"henduntrectæ αβ αγ cum rectis ∧ε ∧ζ,
"convenit inclinatio rectæ αγ ad rectam
"αβ, inclinationi rectæ ∧ζ ad rectam ∧ε

per

"per octavam definitionem. Nam æqualitas angulorum ab inclinationum æqualitate dependet.

". Sequitur igitur signorum β ad γ & ε ad ζ distantias seu interualla convenire: cum intervallorum differentia ab inclinationum diversitate nascatur. Ipsa itaq; signa β γ & ε ζ conjungentes rectæ, æquales erunt. Nam si altera major esset alterâ, & inclinatio inclinatione .i. angulus angulo major esset, contra positum, quod fieri nequit, & ideò convenient earum quantitates. 3ª

" Si igitur triangulorum α β γ & δ ε ζ singulæ quantitates singulis comparatæ æquales fuerint, triangula α β γ & δ ε ζ sibi ipsis conveniunt, & proinde æqualia sunt, per octavam communem sententiam. Quare & reliqui anguli qui ad β & γ reliquis angulis qui ad ε & ζ æquales erunt, cum triangula sibi ipsis conveniant. Si itaq; duo triangula duo latera duobus &c. In totâ hac demonstratione nihil est sanum, nihil solidum, nihil tanto viro dignum. Quod ad primam partem attinet, nihil dico. 4ª

tantum mihi videri, non multum conferre ad conficiendam concluſionem, quod eſt in demonſtrando pervitioſum. Sed condonemus, ſi placet, hoc; quamvis, quod ſciam, nemo veterũ ita loquutus eſt (diſtantiæ punctorum &c.) præter Proclum, cujus verba ſunt interpretantis Euclideam demonſtrationem lineæ rectæ: Oſtendit Euclides per hanc definitionem, ſolam rectam lineam æquale occupare ſpatium ei, quod inter ſua interjacet puncta. Quanta enim eſt alterius punctorum ab altero diſtantia, tanta eſt rectæ quæ ab ipſis terminatur lineæ magnitudo. Secundam partem ſimpliciter recipio, vt doctrinæ Geometricæ congruentem, & Euclideæ definitioni anguli plani. Tertiam ſimpliciter rejicio, vt ſophiſticam & paralogiſticam, diſtantias ſc: punctorum β ad γ & ε ad ζ convenire, cùm intervallorum differentia ab inclinationum diverſitate naſcatur. Quomodo hoc conſtabit, clariſſime Candalla? Neq; enim vel à principio aliquo ex præmiſſis, vel à communi ſenſu, vel à Logica naturali cogimur ei aſſentiri. Quod videns ipſe Candalla, propoſitionem per ſe ca-

ſuram

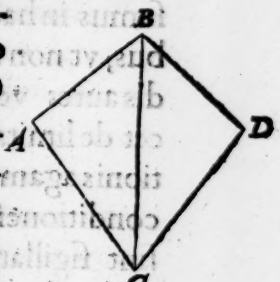
ſuram ſufflaminat hoc fulcro. Nam ſi altera major eſſet alterâ, & inclinatio inclinatione major eſſet, hoc eſt angulus angulo. Verè vtiq; & ab ipſo Euclide demonſtratur legitimâ demonſtratione in viceſima quinta hujus. Verba audiamus.

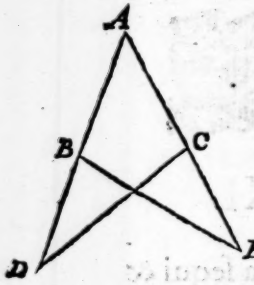
Si duo triangula habeant duo latera duo-
" bus lateribus æqualia, alterum alteri, baſim
" autem habeant baſi majorem: habebunt
" etiam angulum majorem angulo, qui ab
" æqualibus rectis comprehenditur. Quî tibi in mentem venit, vir nobiliſſime, hîc ſumere in demonſtratione quartæ pro confeſſo & principio, id quod ipſe Euclides poſt viginti & amplius propoſitiones legitimo ſyllogiſmo probauit vt dubium & demonſtrabile? Neq; vidit vir doctus ſe in hac re circulum admiſiſſe manifeſtiſſimum (Nam veritas illius viceſimæ quintę pendet ex veritate hujus quartæ, & ibi expreſſe citatur), quod eſt in demonſtrando turpiſſimum. Nam qui dicit, exempli cauſâ, A eſt B, quia C eſt D: & C eſt D, quia A eſt B, dicere videtur A ideo eſſe B, quia A eſt B: quo quid ineptius? Sed de vitio circularis demonſtra-

tionis videte, ſi placet, Ariſtotelem veſtrum. 4° & vltimo demonſtrationis membro in eum incidit ſcopulum, quem tanto ſtudio voluit vitare .i. in ipſam ἐφαρμογὴν & congruentiã, aſſumpto etiam nominatim octavo axiomate, τὰ ἐφαρμόζοντα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. quo axiomate abſq; hæc 4ª & 8ª propoſitio forent, vbi talis applicatio requiritur, potuiſſemus carere, cùm alij præterea vſui in toto Euclide nõ inſerviat. Verba ipſa audiamus in 4° demõſtrationis ſuæ membro. Si igitur triangulorum, &c. Quid ergo tibi venit in mentem, clariſſime vir, iſta pro illis, χαλκέα χρυσέων, imò verè plumbea pro aureis ſubſtituere? O divine Ariſtoteles: tu nos docuiſti Mathematicũ non perpeti πιθανολογικῶς, probabilitates conſectantem, nedum ſyllogiſmo vtentem merè circulari, quod vel omni probabilitatis ſpecie caret. Liceat ergo nobis cum Euclide, Archimede, Proclo, totâq; adeò antiquitate errare potius, quàm cum recentioribus quibuſdam non maximi judicij hominibus verum dicere, præſertim nihil ſani ſolidiúe in hujus ἐφαρμογῆς locum ſubſtituentibus. Nam Ambroſij Rhodij in hanc propoſitionem deliria piget attingere.

LECTVRA XI.

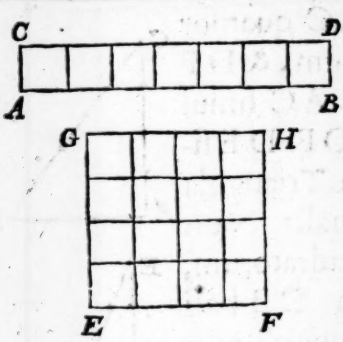
DIxi eadem omnia ſequi & concludi ex identitate, quæ ex æqualitate, ac primò in lateribus, ſint triangula A B C D B C, quæ habeant latus A C lateri D C æquale & latus B C commune, angulumq; A C B æqualem angulo D C B: erit A B baſis baſi B D æqualis, & A B C angulus angulo C B D, & B A C angulus angulo B D C æqualis. Idem de angulis communibus ſtatuendum. Eſto enim angulus D A E fortuito factus, & à lateribus comprehendentibus reſecentur primum A B A C æquales, & connectantur B E, C D. Hic duo ſunt triangula B A E & C A D





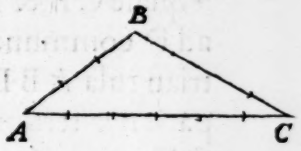
CAD habentia AB latus æquale AC lateri, & AE latus lateri AD, & angulum ad A communem. Erit ergo BE basis basi CD æqualis, & BEA angulus angulo CDA, & ABE angulus ACD angulo, subtensi sc: æqualibus lateribus. Atq, huic figuræ non erit inutile assuefieri nouitios in Geometriâ, quia vsus erit ejus in sequenti Theoremate perneccessarius. In vtraq; autem harum figurarum, demonstratio ex ijsdem procedit principijs, quibus vsi sumus in hac 4ª propositione quæ in manibus; vt non sit necesse ijsdem denuò audiendis aures vestras obtundere. Iam si placet de limitationibus hujus quartæ propositionis agamus, ac primò cur addiderit hanc conditionem, vt bina latera binis lateribus sint sigillatim æqualia. Quid autem fiet, si ambo simul sumpta ambobus simul sumptis sunt æqualia? Dico nihil sequi, etiamsi anguli comprehensi fuerint æquales. Sint, exempli causa, duo triangula ABC DEF, anguliq; ad A & D recti, & proinde æquales; sitq;

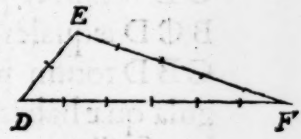
sitq; A B trium pedum, A C quatuor pedum, D E duorum pedum, & D F quinq; pedum. Erunt A B A C simul sumpta septem pedum, & D F D E simul sumpta septem pedum. Triangula tamen erunt prorsus inæqualia. Nam A B C est sex pedum quadratorum, D E F verò quinq;, basisq; C B basi E F inæqualis, & reliqui anguli reliquis angulis prorsus inæquales: minorisq; trianguli major erit basis, quod Geometriæ ignaro mirum fortasse videatur, est tamen verissimum. nam B C basis quinq; pedum erit, & E F quinq; pedum cum triente & ampliùs. Ita videtis ambitum majoris trianguli duodecim esse pedum, cùm ambitus minoris sit duodecim & trientis. Obseruate igitur adolescentes ex æqualitate aut majoritate rectarum ambientium non colligi æqualitatem aut majoritatem superficiei contentæ. Sit exemplum in duobus quadrilateris. Esto A B septem pedum, & A C pedis vnius, & compleatur figura A C D B. Sit jam E F quatuor pedum ex eaq; quadratum E G H F. Perimetri, id



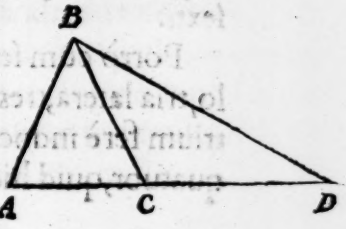
eſt, lineæ ambientes figuram oblongam A D ſimul ſumptæ, pedum ſunt ſexdecim; & lineæ ambientes quadratum itidem ſexdecim pedum. Iſoperimetræ ergo figuræ AD, EH. Eſtque figura A D oblonga, non niſi ſeptem pedum quadratorum; cum quadratum E H ſit ſexdecim pedum quadratorum, duplo majus & amplius, quàm A D, vt apparet intuenti figuram. Figuræ igitur æqualis ambitus non ſunt ſemper æqualis capacitatis, etiamſi anguli fuerint æquales; vt in appoſitis figuris omnes anguli recti ſunt, & proinde æquales. Et per hanc falſam conſequentiam, plures, inquit Proclus, ſocios ſuos in diviſionibus agrorum deceperunt. Oſtendimus ſuperiùs etiamſi in duobus triangulis duo latera vnius ſimul ſumpta æqualia fuerint duobus lateribus alterius ſimul ſumptis, & anguli comprehenſi æquales, nihil tamen ſequi quoad æqualitatem aliorum. Iam dabimus exemplum vbi duo latera vnius A B B C ſimul

mul ſumpta æqualia ſunt duobus lateribus alterius ſimul ſumptis D E E F, & baſis A C baſi D F æqualis: neq; tamen ex eo ſequetur triangulorum æqualitas: hoc tantum, triangulũ illud majus fore, cujus latera propiùs ad æqualitatem accedunt: Vt quia A B B C minus inæqualia ſunt quàm D E E F, erit triangulum A B C majus triangulo D E F, quod in doctrinâ Iſoperimetrorum perſpicuè demonſtratur.

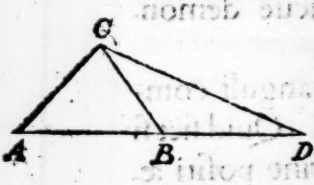




" Sequitur alia limitatio, & anguli com-
" prehenſi æqualibus lateribus. Quid fiet ſi anguli comprehenſi non fuerint poſiti æquales, ſed anguli æqualibus lateribus oppoſiti? Dico nihil ſequi. Sit enim triangulum æquilaterum vel æquicrurum A B C, & producatur A C in D, & connectatur B D. Hic erunt duo triangula A B D C B D, quæ habent duo latera duobus lateribus ſigillatim æqualia, ſcil: A B



æquale C B, & B D commune: angulumq; ad D communem. Neque tamen erunt vel triangula A B D C B D æqualia, totum & pars: nec tertium latus tertio lateri, A D, & C D totum & pars: nec reliqui anguli B A D B C D æquales, internus externo, nec A B D C B D totum parti. Iam sint duo triangula quæ habeant duo latera duobus lateribus sigillatim æqualia, vt in hâc quartâ, angulumq; comprehensum angulo comprehenso minimè quidem æqualem, sed residuum ad duos rectos. Quid inde sequetur? æqualitas sc: triangulorum, & præterea nihil. Vt triangulum A B C habeat latus A B æquale lateri B D trianguli B C D, & latus B C commune, & angulum A B C residuum ad duos rectos angulo D B C: erunt triangula A B C, C B D æqualia .i. superficies superficiei per primam sexti.



Porrò cùm septem sint, vt dixi, in triangulo, tria latera, tres anguli, & area, & æqualitas trium ferè inducat æqualitatem reliquorum quatuor, quid hic tenendum sit, vt simus ab

error

errore ſecuri, videndum eſt. Ex tribus ergo datis æqualibus ſeptem fieri poſſunt ſyzygiæ, combinationes, & non plures. Vel enim

1 Tria latera dantur æqualia, vel
2 Tres anguli, vel
3 Duo latera & angulus, vel
4 Duo anguli & latus, vel
5 Duo anguli & area, vel
6 Duo latera & area, vel
7 Angulus, latus & area.

Ex his ſeptem, ſexta & ſeptima ſunt prorſus invtiles ad inducendam æqualitatem. Secunda, ſimilitudinem inducit (nam vel minima triangula maximis poſſunt eſſe ſimilia & æquiangula) ex quarta ſexti; æqualitate nullo modo. Prima ſyzygia cùm tria latera tribus lateribus dantur æqualia eſt ſimpliciter vera. Sequitur enim æqualitas quatuor reliquorum ex octava, & quarta hujus. Quinta ſyzygia, cùm duo anguli vnius trianguli ſunt æquales duobus angulis alterius & triangulum triangulo, ſive area areæ æqualis, etiam quatuor reliqua in vno triangulo ſunt æqualia quatuor reliquis in altero triangulo, eſtq; ſimpliciter vera. Quod tamen Eucli-

des nusquam in elementis demonstravit. Poterit tamen professor Geometriæ cùm ad decimã nonã sexti venerit, ex ea & quarta sexti illud demonstrare. Tertia syzygia non est simpliciter vera, sed triplicem admittit varietatem, eamq; limitatam & quasi conditionatam. Nam, vel duo latera sunt æqualia & angulus comprehensus illis duobus lateribus æqualis, & tum ex hac quarta sequitur æqualitas quatuor reliquorum: 1°

Vel duo latera sunt æqualia duobus lateribus, & angulus angulo, qui æqualibus scilicet lateribus subtenduntur. Atq; hic requiritur alia conditio, vt reliqui duo anguli lateribus similiter æqualibus oppositi, vterq; vel minor sit recto, vel non minor; cujus casus demonstratio, quamvis ab Euclide expresè non ponatur, colligi tamen potest ex 2°

septima sexti. Vel duo sunt latera æqualia duobus, & angulus comprehensus æqualibus lateribus vnius, subtenso angulo æqualibus lateribus alterius: & tum nihil sequitur. 3°

Quarta syzygia, cùm duo anguli dantur æquales, & latus, admittit etiam non nullam distinctionem, neq; est simpliciter vera. Nã

si

si duo latera sunt æqualia binis angulis æqualibus adjacentia, sequitur æqualitas quatuor reliquorum, ex vicesima sexta hujus. Item si bini anguli sunt æquales & duo latera subtensa sc. æqualibus in vtroq; triangulo angulis, sequitur, vt supra, æqualitas reliquorum. Quod si latus oppositum vni angulorum æqualium in vno triangulorum fuerit æquale lateri opposito alteri angulorum æqualium in altero, vel latus adjacens in vno æquale lateri opposito in alio, nihil sequitur. Ita casus vtiles ad concludendam æqualitatem tantummodo quinq; sunt.

1 Trium laterum æqualitas.
2 Duorum laterum & anguli comprehensi.
3 Duorum laterum & anguli non comprehensi, sub vnâ tamen aliâ conditione.
4 Duorum angulorum & vnius lateris, conditionati tamen vt supra.
5 Duorum angulorum & areæ, cujus in trigonometria non magnus vsus, vti nec vspiam exprimitur ab Euclide.

His addere possumus & sextum casum, etsi

etsi paulò diversi generis. Si duo triangula habuerint duas perimetros inter se æquales, & duos angulos duobus angulis, erunt quinq; reliqua quinq; reliquis æqualia, scilicet tria latera tribus lateribus, & area aræ, & tertius angulus tertio. Quod ad quartam sexti ope primæ quisq; poterit Geometriæ professor suo loco demonstrare. Hîc adijci plures casus non difficeor, ex quibus æqualitas in triangulis poterit induci, sed non magni in Geometricis vsus, quales sunt aliquot à Regiomontano traditi in 2°. libro de triangulis. Quot autem casus sunt qui æqualitatem duorum triangulorum necessariò inferunt, octo sunt, & non plures, in doctrina triangulorum ad Astronomica pertinentium (Trigonometriam vocant) ex quibus in vno triangulo datis siue notis elici posset notitia reliquorum. Verbi gratia, quia æqualitas duorum laterum cum angulo comprehenso, vel trium laterum, vel duorum angulorum cum vno latere sic posito, vel duorum angulorum cum aream, vel duorum laterum cum angulo non comprehenso cum adjecta, quam supra posui, conditione:

quia

quia in his, inquam, quinq; casibus inducitur æqualitas duorum inter se triangulorum in Trigonometria, vt dixi, hæc nota in vno triangulo satis sunt ad notificanda reliqua in eodem triangulo. Nam quæ non sufficiunt ad probandam æqualitatem in diversis triangulis, ea nota in vno quomodo satis esse possunt ad exquirenda reliqua? Cum infinita esse possint triangula cum ijsdem conditionibus, neq; infiniti sit vlla determinata scientia: Quam regulam adolescentibus annotâsse non erit invtile, ad errores in Trigonometria cavendos. Nam & magni viri cùm eam neglexissent, in graues reprehensiones inciderunt: nec immeritò. Diximus de quarta & ad quartam, quæ visa sunt obseruatione digna: quæ nititur conuersa octavi axiomatis ter sumptâ pro numero datorum, & eodem quater directè sumpto pro numero quæsitorum, interposito auxilio decimi axiomatis. Hujus demonstrationis vim Proclus pag. 65 breviter complectitur his verbis. Quod autem tota præsentis Theorematis demonstratio à communibus de- "
pendet notionibus, ac veluti sponte naturæ "

"proveniens eſt, ab ipſaq; ſuppoſitionum evi-
"dentiâ egreſſa, cuilibet manifeſtum eſt. Nam
"cùm quidem duo latera duobus lateribus
"alterum alteri æqualia ſint, ſibi invicem con-
"gruunt. Cum verò anguli qui ab æqualibus
"lateribus continentur æquales ſunt, ipſi
"quoq; ſibi invicem congruunt. Angulo au-
"tem ad angulum, lateribuſq; ad latera coap-
"tatis, infernæ etiam laterum extremitates cō-
"gruent. Si autem hæ, baſis quoq; congruet
"baſi. Si vero tria tribus, totum etiam trian-
"gulum toti triangulo, omniaq; omnibus æ-
"qualia erunt. Æqualitas igitur in iis quæ e-
"jusdem ſunt ſpeciei conſiderata totius de-
"monſtrationis cauſa eſſe apparuit. Duo e-
"nim hic ſunt pronuntiata totam propoſiti
"Theorematis methodum continendi vim
"habentia, vnum quidem dicens quòd ea,
"quæ congruunt ſibi invicem æqualia ſunt,
"& hoc ſimpliciter verum eſt, nullaq; indiget
"limitatione, quo Elementorum inſtitutor &
"in baſi & in ſpatio, reliquiſq; Angulis vtitur.
"Hæc enim, inquit, æqualia ſunt, quoniam ſi-
"bi invicem congruunt. Alterum verò, quod
"ea quæ æqualia data ſunt, ſibi inuicem con-

gruunt.

gruunt. Hoc autem non in omnibus verum
est, sed in ijs quæ specie similia sunt. Specie
autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ
lineæ, & circumferentia circumferentiæ cir-
culi ejusdē, & anguli qui à similibus simili-
ter jacentibus lineis comprehensi sunt. Horū
autem dico quod quæ æqualia data fuerint,
sibi invicem congruunt: ita vt tota demon-
stratio (vt breui complectens dicā) hujusmo-
di sit: Hæc hisce æqualia data sunt, duo nem-
pe latera duobus lateribus, & anguli ab ipsis
comprehensi, hæcq; sibimet ipsis conveni-
unt. Si autem hæc sibi invicem conveniunt,
& Basis basi, omnibusq; omnia conveniunt.
Si verò hæc conveniunt, æqualia quoq; sunt.
Si igitur hæc hisce æqualia data sunt, simul
etiam ostenditur, quod omnia omnibus sunt
æqualia. Hæc Proclus: qui præterea multus
est eâdem paginâ in assignandis rationibus,
cur à problematibus cæperit Euclides, potiùs quàm Theorematibus. Summa huc redit, quia in quarta mentio fit æqualitatis rectarum: ideò anteà in secunda & tertia necessarium fuisse fabricam rectarum æqualium docere. Per similem rationem, quia

mentio eſt ibi æqualium angulorum, ideò angulorum æqualium fabrica antea debuit tradi, quæ tamen non traditur, niſi in viceſima tertia hujus. Quare ratio Procli magis ſpecioſa, quàm ſolida. Carpus Mechanicus acutiùs, problemata eſſe priora Theorematibus, quia ſubjecta ſunt priora accidentibus. Problemata docent fabricare ſubjecta, Theoremata verificant accidentia de ſubjectis: ſed ne hoc quidem ſolidum eſt. Veriſſimum certè, ſubjectorum cognitionem debere præcedere cognitionem accidentium: ſed nos dicimus ſubjecta nobis per definitiones innoteſcere: alioqui parum nos juvaret vnius aut alterius miſeri problematis notitia ad plenam ſubjectorum cognitionem. Vtcunq; ergo τάξει, ordine, problemata priora ſunt Theorematibus, præſertim ijs, qui ab artibus circa ſenſibilia verſantibus aſcendunt ad contemplationem, dignitate certè, vt ait acutiſſimus Geminus, à Theorematibus Problemata ſuperantur. Illud verò leuiculum fuerit monuiſſe, vt vitioſum eſt & falſum, pauciora habere data, quàm neceſſitas concluſionis poſtulat; ſic vitioſum eſt & nugato-

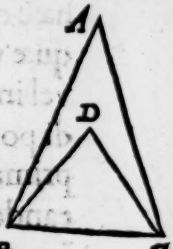
nugatorium plura accumulare data, quàm eſt neceſſe. Vt in hac propoſitione, ſi quis ex æqualitate duorum laterum concludere velit æqualitatem reliquorum, vel ſi quis ex æqualitate laterum & anguli comprehenſi & baſeos concludere velit æqualitatem angulorum, vtrumq; in vitio eſt; illud, quia falſum, hoc, quia nugatorium. Nam omnes hypotheſes propoſitionis debent neceſſariò eſſe operatiuæ ad colligendam concluſionem; alioqui vitioſa eſt propoſitio. Qua in re egregiè delirârunt Ioſephus Scaliger & Orontius, vt homines decuit non ſani cerebri.

LECTVRA XII.

Propoſitio quinta.

Sequitur quinta propoſitio, & ipſa nonnullis obſcura ſentibus, ideóq; ſummam requirens attentionem propter demonſtrationem novitijs in Geometriâ paulò difficiliorem, tot intercurſu triangulorum impeditam & involutam. Ισοσκελῶν τριγώνων. Aequicrurium triangulorum.) Atqui hujus propoſitionis ſubjectum, Triangulum eſt, non vt in præcedente, Triangula. Et falſiſſimum eſt omnia Triangula æquicruria habere angulos ad baſim æquales. Nam anguli A B C, &

& ACB multò ſunt majores quàm anguli DBC & DCB, quanto ſc: angulus ad A minor eſt angulo ad D: hoc eſt angulis A B D, A C D. Neq; vllam inire poſſum probabilem rationem, cur cùm in cæteris propoſitionibus, vbi vnicum triangulum eſt ſubjectum, voluerit per ſingularem numerum rem enuntiare, vt in 6ª. proximè ſequente, in 16ª.17ª.18ª.19ª.20ª.21ª.32ª.48ª, Παντὸς τριγώνου, hic per pluralem tradere voluerit, ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Eodem tamen res recidit, ſi verba ſanè intelliguntur, ἰσοσκελῆ τρίγωνα pro ἑκάστου τριγώνου ἰσοσκελοῦς; hoc eſt, vniuſcujuſq; triangulorum æquicrurium anguli ad baſim, &c. Porro Theorematum, vti notat doctiſſimus Proclus, alia ſimplicia ſunt, alia compoſita. Simplicia, quæ vnam habent hypotheſim ſive datum, & vnicam concluſionem ſive quæſitum & demonſtrandum: vt in proximè ſequenti. Si duo anguli trianguli ſunt inter ſe æquales, latera ſubtendentia æqualia erunt; & in 15ª. hujus & alijs. Compoſita quę vel hypotheſes habent compoſitas, vt octava hujus, vel concluſiones, vt



hæc

hæc quinta, vel vtraq;, vt quarta hujus. Iam quæ vtrinq; compoſita ſunt, vel complexa, vel incomplexa ſunt. Complexa, quæ dividi poſſunt in plura ſimplicia theoremata: vt prima ſexti: Triangula & parallelogramma eandem habentia altitudinem, ſunt vt baſes. Ita enim in duo Theoremata dividitur: Triangula eandem habentia altitudinem ſunt vt baſes: & parallelogramma eandem habentia altitudinem, ſunt vt baſes. Incomplexa quæ in ſimplicia Theoremata dividi & reſolvi non poſſunt, vt proximè præcedens: quæ quamvis compoſita ſit, & quoad hypotheſes, & quoad concluſiones, non poſſumus tamen dicere, ſi duo latera ſunt duobus lateribus æqualia, aliquid ſequi de baſi, nec ex anguli comprehenſi æqualitate aliquid ſequi de reliquis angulis. Nulla enim concluſionis pars vera eſt (quæ ſunt, vt ibi diximus, quatuor) niſi omnibus hypotheſibus coaſſumptis. Iam ad Euclidem redeamus.

Æquicrurium triangulorum, &c. Nulla eſt in verbis propoſitionis obſcuritas vel ambiguitas, ſi ſanè, vt dixi, intelligantur, de vnico

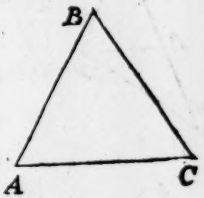
ſc:

ſc. triangulo. *Sit triangulum æquicrurum* α β γ) ἔκθεσις, ſive expoſitio. λέγω ὅτι. dico) διορισμὸς, determinatio. εἰλήφθω γὰρ. ſumatur enim) κατασκευὴ fabrica ſive ſtructura. Ἐπεὶ οὖν. quoniam igitur.) Incipit demonſtratio, in qua tota difficultas ſita eſt, ex quarta bis ſumpta, & tertio axiomate pendens. quia æqualis eſt α ζ τῇ α η, (factæ ſunt enim æquales per κατασκευὴν) & α β τῇ α γ per hypotheſin propoſitionis (nam triangulum α β γ ſupponitur æquicrure) Duo igitur latera ζ α α γ duobus lateribus η α α β æqualia ſunt, & communem angulum comprehendunt ζ α η. Iam ventum eſt ad caſum quartæ propoſitionis. Et quod ſupra dixi in quarta, ejus vſum jam ſtatim habemus in hac quinta, nempe ea quæ valent in æqualitate, valere multò magis in identitate. Baſis ergo ζ γ baſi η β æqualis. (hoc rectè, & ad vſum ſequentium) & α ζ γ triangulum triangulo α η β æquale. Quorſum hoc? Neq; enim prodeſt quicquam ad conficiendam concluſionem æqualitas triangulorum, ſcilicet

areæ contentæ ad aream contentam. Sed nimirum iſte mos eſt Euclidi & veteribus Geometris, vt omnes partes propoſitionis, quam citant, ſeriatim repetant, etiamſi vſus non ſit niſi vnius aut alterius. *Et α γ ζ angulus angulo α β η, & angulus α ζ γ angulo α η β)* etiam hæc rectè & ex vſu. *Et quoniam tota α ζ. Reliqua ergo β ζ.* Per tertiam communem ſententiam: Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ reſtant ſunt æqualia. Demonſtrata autem eſt æqualis ζ γ τῇ η β, & angulus β ζ γ angulo γ η β per præcedentem partem hujus demonſtrationis. *Duæ autem,)* Iam iterum ventum eſt ad caſum quartæ propoſitionis. *Et baſis ipſorum communis,)* Diximus ſuperius hoc vitioſum eſſe, quia nugatoriũ, non quia falſum. *β ζ γ triangulum triangulo γ η β.)* Etiam hoc nullum ad vſum apponitur, vt in ſuperiore parte demonſtrationis. Æqualis ergo ζ ζ γ angulus angulo η γ β) anguli ſc: ſub baſim; atq; ita quod poſteriori loco propoſitum eſt, primo loco demonſtratur. Quoniam igitur totus α β η angulus) anguli α β η, α γ ζ ſupra demõſtrati ſunt æquales, & anguli γ β η, β γ ζ.

Com-

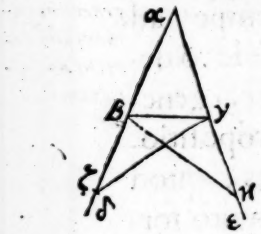
Componitur autem α β η angulus ex α β γ & γ β η, & α γ ζ angulus ex α γ β & β γ ζ, vt * partibus integrantibus: ſublatis ergo ab æqualibus α β η α γ ζ æqualibus γ β η, β γ ζ, reſtant aliæ duæ partes integrantes æquales, ſc: anguli α β γ α γ β, anguli nempe ad baſim æquicruris, quod fuit priore loco demonſtrandum. (περὶ ἴσα ἰσοσκελοῦς &c.) generalis concluſio repetitis verbis propoſitionis. Notent autem adoleſcentes, quod hic concluditur in æquicruribus, multò fortiùs concludi in æquilateris. Vt ſit in A B C æquilatero A B & B C æquales: erunt ergo anguli ab baſim ſcil: A & C æquales per hanc quintam, & rurſus quia A B, A C æquales, erunt anguli ad baſim B & C æquales. Ergo per primum axioma A & B anguli æquales, & omnes omnibus.

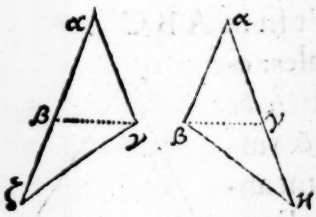


* *Hoc ex aſpectu diagrammatis patet, de quo genere argumentãdi dicetur ad ſeptimam huius.*

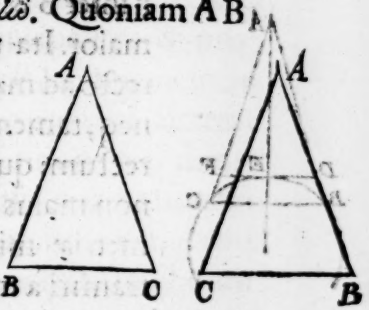
Hujus propoſitionis κατασκευὴν ſiue fabrica & ſtructura diſſoluta eſt ab interprete noſtrate, viro docto & diligenti, in ſuas partes perſpicuitatis majoris gratiâ, quia triangulorum intercurſus alterius in alterum propter communitatem anguli & portio-

num laterum novitijs & non assuetis juvenibus demonstrationibus Geometricis nonnullam obscuritatem afferre videtur. Nos itaq; illius vestigijs insistentes, solutis, vt dixi, Trianguli compagibus, sed retentis ijsdem literis & eâdem figuræ positione & quantitate, idem oculis clariùs repræsentamus in figura apposita. Nam demonstratio eadem est. Idem de angulis ad basim demonstrabitur lateribus non productis, neglectisq, angulis sub basi, ex quarta propositione ter sumptâ, & tertio axiomate bis, hoc modo. Sit æquicrure ABC, dico angulos ABC ACB æquales esse. Resectis enim ab AB BC æqualibus, AD AE æqualibus per 3 um axioma restant DB EC æquales. In triangulis AEB ADC latus AB lateri AC & latus AE lateri AD æquale, & angulus A communis, ergo per quartam bases EB DC erunt æquales, & ABE angulus æqualis angulo ACD

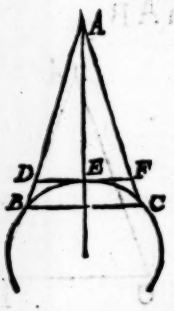




ACD. Rursus in triangulis EBD DCE duo latera duobus lateribus sunt æqualia, & angulus comprehensus angulo, erit ergo per quartam EDB angulus angulo DEC æqualis, & angulus DEB angulo EDC demonstratus est æqualis. Ablatis ergo DEB EDC æqualibus à DEC EDB, restant BEC CDB æquales: & latera comprehendentia æqualia, anguli ergo per quartam ECB .i. ACB & DBC .i. ABC æquales, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Brevius Pappus hoc modo, intelligendo hoc vnum triangulum, tanquam duo, per ἐφαρμογὴν. Quoniam AB æqualis est τῇ AC, & AC ipsi AB, angulusq; ad A idem, ergo per quartam anguli ad B & C æquales, subtensi sc. æqualibus lateribus AC AB. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Quod si in hac figurâ Pappi produxerimus latera AB, AC vt in quinta, & adhibuerimus ἐφαρμογὴν .i. congruentiam, vt in quarta; & de angulis ad basim & angulis sub basi constabit nullo negotio demonstratio. Hujus propositionis in-



ventionem debemus Thaleti Mileſio, nec minor gratia habenda acutiſſimo gemino hoc Theorema ad καθολικώτερον reducenti, & æqualitatem angulorum oſtendenti, non ſolùm cùm duæ rectæ æquales ſuper rectam inſiſtunt, ſed etiam cùm duæ rectæ æquales ſuper quamlibet lineam ſimilarium partium, quales ſunt præter rectam ſola peripheria & helix circa cylindrum. Et quidem de circulo perſpicuum eſt in figura appoſita. Sunt autem anguli ad B & C A B E, & A C E rectis minores, vt & omnes anguli inter B & E. & angulus ad E recto maior. Ita tranſitus fit à minoribus recto ad majorem per omnia media, neq; tamen vnquam pervenitur ad rectum: quod Campanus in tertio, non malus artis Magiſter, inter Geometriæ miracula poſuit: poſſe ſcil: tranſiri à minore ad majus per omnia media, & nunquam perveniri ad æquale. De Helice & quia operoſior eſt & obſcurior tractatio quàm vt novitijs conveniat, totam relinquo ſucceſſori meo, ſi ipſi viſum fuerit, explanandam.



Pro-

Propoſitio 6ª.

Ἐὰν τριγώνου. Si trianguli.) Adfert hæc ſexta propoſitio duo nova, ἀντιστροφὴν & ἀπαγωγὴν, id eſt converſionem & deductionem ad abſurdum ſiue impoſſibile, quoad totum demonſtrationis tenorem. (Nam particula demonſtrationis quartæ etiam ἀπαγωγὴν habet in demonſtrandâ æqualitate baſium, ſed hæc demonſtratio tota eſt ἀπαγωγικὴ.) De vtroq; breviter dicendum, quanquam contra artis præcepta, fateor, ſimul tradi ſcientiam & modum ſciendi, ſed junioribus hæc audire non erit fortaſſe inutile. Conuerſio igitur principaliter & propriè, ἀντιστρόφως, dicta eſt, cùm concluſio vnius propoſitionis fit hypotheſis alterius ſimpliciter & ſiue vlla additione vel diminutione: quam ſimplicem converſionem vocant Logici: vt in hoc exemplo, ſi triangulum fuerit æquicrure, anguli ad baſim ſunt æquales, quæ eſt quinta præcedens; & hujus converſa, ſi anguli ad baſim fuerint æquales, Triangulum erit æquicrure. Converſionis ſimplicis nullum eſt illuſtrius exemplum in tota Geometria, quàm eſt illud

in

in nona decimi, vbi conuersio est simplex & affirmativa & negatiua. Affirmatiua, Quadrata ex rectis longitudine commensurabilibus, proportionem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et ejus conuersa: quadrata proportionem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia. Negatiua: quadrata, quæ à longitudine in commensurabilibus rectis fiunt, inter se proportionem non habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum: & ejus conuersa: Quadrata proportionem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neq; latera habebunt longitudine commensurabilia. Hic vt videtis, vtrobiq; est simplex conversio in vniversali affirmatiua, quæ non est simpliciter & vbiq; vera. Multæ sunt enim conversiones falsæ, cùm accidens prædicatur de omni, κατὰ παντός, solummodo. At in quibus τὸ πρότερον ἐν ἀρχῇ, καὶ τὸ ᾗ αὐτό, quod prius inest, & quatenus ipsum, assumitur, in illa prędicatione etiam simplex conversio locum habet, id quod fit non ratione formæ

ſed ratione materiæ; vt omnis homo eſt riſibilis, & omne riſibile eſt homo. atq; hæc de converſione principaliter & propriè dicta. Illud verò fortaſſe non inutile fuerit obiter monuiſſe ſtudioſos adoleſcentes, ex illis quatuor vniverſalibus propoſitionibus in nona decimi duas eſſe ſuperfluas, & nouâ demonſtratione non indigere. Nam qui demonſtrauit, ſi A eſt B, C eſt D, per deſtructionem conſequentis vnà demonſtrauit, ſi C non eſt D, neq; A eſt B. Et qui demonſtrauit, ſi C eſt D, A eſt B, per deſtructionem conſequentis itidem demonſtrauit, ſi A non eſt B, C non eſt D. Sed reliqua converſionis genera videamus. Aliud eſt conuerſionis genus minùs principale, vt cùm non tota concluſio vnius fit hypotheſis alterius, ſed pars aliqua vel partes. Hoc ſenſu octava propoſitio eſt converſa quartæ. Nam cùm quarta ex æqualitate duorum laterum & vnius anguli probet æqualitatẽ tertij lateris, octaua propoſitio ponit pro hypotheſi æqualitatem duorum laterum (quod eſt commune cum quarta) & æqualitatem tertij, quod eſt vnum ex quæſitis ſiue concluden-

dis in quarta: & concludit æqualitatem anguli, quæ eſt inter hypotheſes quartæ. Converſiones igitur in Geometria ſunt vel vniverſales, vt in prioribus exemplis, vel partiales, vt in exemplo octauę propoſitionis, cùm pars cum parte convertitur: eſtq; prius converſionis genus ſimplex & vniuſmodi: alterum multis modis variabile. Diſtinguitur autem primigenia propoſitio à converſa, quod in primigenia ferè demonſtretur συμπτωμα ſiue accidens de ſubjecto; in converſa ſubjectum de ſymptomate: Vt in hac converſa. Eſt etiam aliud converſionis exemplum, cum concluſio duarum propoſitionum fit hypotheſis tertiæ, & hypotheſes duarum concluſio tertiæ, atq; ita vna propoſitio convertitur cum duabus, Vt viceſima nona hujus cum 27ª. & 28ª.

Sequitur vt de deductionibus ad impoſſibile diſſeramus, de quibus in Analyticis fuſè tractatur, cap. 29. & 44. primi Priorum, & cap. 11° & tribus ſequentibus ſecundi. Nos pauca ex multis delibemus, quantum Geometriæ ſubjecto ſatis ſit. Ioſephus Scaliger Grammaticus melior, quàm Logicus, cùm intellexiſſet

intellexiſſet poſt editũ à ſe libellum κυκλομετρικὴν, multos incõmodos rumores in Galliâ, Germania & Angliâ diſſeminari, audiſſetq; multos confutationem meditari, meq; inter cæteros, vel præ ceteris, ſuſpectum haberet, antea ſibi cognitum familiariter Lutetiæ: miſſa ad me confutatione, vt ſibi videbatur probabili Archimedeæ demonſtrationis in illo aureolo libello de menſura circuli, cùm eſſet hominis Logicam omnem neſcientis, rejectis ſc: ἀπαγωγαῖς, deductionibus ad abſurdum, vt paralogiſticis & falſis, hoc à me tulit reſponſum. Quòd abductionem " ad impoſſibile paralogiſticam eſſe ſcribis, E- " quidem non poſſum tibi (vir nobiliſſime) aſ- " ſentiri, ne tu quidem ipſe, ſi tibi conſtare vis, " de antiqua poſſeſſione deijcies, qui cùm ſæ- " pè alias eam adhibuiſti, tum hoc ipſo in lo- " co Archimedis apagogen ἡ ἀπαγωγῆς ſuſtu- " liſti. Atqui ſyllogiſmo, non paralogiſmo, pa- " ralogiſmum ſublatum oportuit. Quid? Ari- " ſtoteles, Plato, Theophraſtus, omnis anti- " quitas κανόνι καμπτῷ, regula inflexa, vſa eſt? " Canon quippe ſcientiarum Logica, Logices " ἔργον, opus præcipuum, ſyllogiſmus demon- " ſtrati- "

"ſtrativus: Cujus duo modi ab ipſa naturâ
"proditi: alter δεικτικὸς, oſtenſiuus, alter διὰ τοῦ
"εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, per abductionem ad
"impoſſibile: Ille rem per media neceſſaria
"ita eſſe: hic niſi ita ſit, abſurdum per media
"neceſſaria conſequi oſtendit, priore quidem
"fortaſſe minus ἐπιστημονικὸς, aut ſcientiæ gene-
"rativus, & dignitate inferior, veritate ac ne-
"ceſſitate par & æqualis. Ex quo enim falſum
"& abſurdum per media neceſſaria conſequi-
"tur, illud ipſum falſum & abſurdum eſt. Mo-
"dus autem progrediendi in apagogis qualis
"ſit, & quàm naturæ conueniens, docet Pro-
"clus ad ſextam primi element: πᾶσα γε μὴν,
"&c. omnis deductio ad impoſſibile, id quod
"quæſito propoſitæq; concluſioni contradi-
"ctorium eſt accipiens, hocq; ſupponens pro-
"greditur, donec in manifeſtum abſurdum in-
"cidat: per illudq; ſuppoſitionem falſam ad-
"verſarij auferens, id quod à principio quæ-
"rebatur ſtabiliat. Id quod Alexander illuſtri
"exemplo oſtendit ad primum priorum A-
"nalyticorum. Qui vult, inquit, demonſtrare
"diametrum in quadrato eſſe incommenſura-
"bilem lateri ſive coſtæ demonſtratione per

im-

impoſſibile, primum contradictorio ſuppo-
ſito, viz: ipſam commenſurabilem eſſe lateri,
oſtendit per ſyllogiſmum Δεικτικὸν, oſtenſi-
vum, affirmativum, quod hoc ſuppoſito im-
par numerus fiet æqualis pari: quod quia
impoſſibile eſt, eâdem operâ tollitur ſuppo-
ſitio, ex quâ hoc ſequebatur. Quâ ſuppoſiti-
one adverſarij ſublatâ, ejus contradictori-
um ſtabilitur, viz: non eſſe commenſurabi-
lem diametrum lateri; quia in omnibus al-
tera pars contradictionis vera eſt. Hæc illi,
non tam ab arte deprompta, quàm ab ipſâ
naturâ hauſta & expreſſa. Noli itaq; (cla-
riſſime vir) analyticam ſublatis ἀπαγωγαῖς ὑ-
ποφθαλμον, vnoculam, relinquere. Quo ge-
nere vſos eſſe conſtat, quoties ſyllogiſmo o-
ſtenſivo deſtituerentur, aliquando etiam
cum vtrumq; ſuppeteret, cùm in cæteris arti-
bus principes viros, tum etiam in Geome-
triâ. Ac ne longè abeamus, primum in Ge-
ometria * Theorema, quod eſt totius artis
fundamentum, δι' ἀπαγωγῆς demonſtratur.
Quo falſo vel dubio falſa vel dubia eſt tota
deinceps Geometria. Porrò abſurda ad quæ
διὰ τῶν ἀπαγωγῶν in Geometriâ abducimur,

* *quarta primi elementorum*

"in triplici ſunt differentia. Vel enim ſunt
"contra [1] hypotheſes propoſitionis conſtru-
"ctioniſve, vel [2] contra principia, vel contra
"prius [3] demonſtrata. Primi generis exem-
"plum eſto ad decimã nonã primi elemento-
"rum: vltimi, ad octavam ejuſdem; interjectæ
"duæ ſunt ſpecies. Vel enim fiunt ἀπαγωγαὶ
"contra propria Geometriæ principia, vt in
"quartâ primi: vel contra principia commu-
"nia, vt in ſecunda duodecimi: Si circuli non
"ſunt vt quadrata ex diametris, ſequetur χωρίον
"aliquod dari poſſe quod eodem Polygono
"& majus erit & non majus: quod eſt contra
"principium commune omnium artium, ip-
"ſiuſq; adeò naturæ, ſc: contradicentia de eo-
"dem non poſſe affirmari.

Iam τῶν ἀπαγωγῶν, abductionum ad impoſſibile, inſtrumentum eſt ſyllogiſmus hypotheticus ex ſecundâ ſpecie τῶν συνημμένων, connexorum ſive cõditionalium. Hypotheticorum enim ſyllogiſmorum, vt hoc etiam elargiar in gratiam juniorum, veteres peripatetici duo ſtatuunt genera: vnum eſt connexorum, συνημμένων, ſive cõditionalium, vt vocant; alterum diſiunctivorum, διεζευγμένων.

Rurſus

Rurſus vtriuſq; generis binas ſpecies, ſive modos. Primus modus, qui prior eſt connexorum, à poſitione antecedentis procedit ad poſitionem conſequentis: vt ſi A eſt B: C eſt D. ſed A eſt B. Ergo C eſt D. Si Trianguli angulus externus eſt æqualis duobus internis oppoſitis, tres interni ſunt æquales duobus rectis: Sed verum antecedens, quare & conſequens verum. Eſtq; hic modus peculiaris demonſtrationis oſtenſivæ. Alter modus connexorum eſt à deſtructione conſequentis, quando ex conſequenti ſublato tollitur antecedens, modus περὶ ἀπαγωγῶν ſive abductionum proprius. Vt ſi A eſt B. C eſt D: Sed C non eſt D, ergo A non eſt B. Cujus exemplum habemus inſigne in hac ſexta. Si trianguli æquales habentis angulos latera, quæ æquales angulos ſubtendunt, ſunt inæqualia, pars erit æqualis ſuo toti: ſed pars non poteſt eſſe æqualis ſuo toti: Ergo latera trianguli &c. non ſunt inæqualia. æqualia ergo. Atq; hunc eſſe ſecundum modum περὶ συνημμένων expreſſè affirmat Proclus; vt ſciamus illam diviſionem ſyllogiſmorum hypotheticorum perantiquam fuiſſe. Hunc autem

tem modum tum dico verum esse, cum procedimus à destructione consequentis ad destructionem antecedentis. Nam si contra à destructione antecedentis ad destructionem consequentis procedimus, falsa erit collectio & cum Melisso, vt est in 1° Physic, ἀσυλλογίστως concludemus. Vt si homo est lapis, homo est corpus: sed homo non est lapis; ergo homo non est corpus. Hisce duobus connexis syllogismis Cicero in Topicis adjungit tertium ex purè negativis, neq; tamen vitiosum. Si A non est B, C non est D: sed A non est B, ergo C non est D. Cui alium possumus addere in non purè negativis Si A non est B, C est D. sed A non est B, ergo C est D, Quæ etiam vera est. Atq; hi sunt modi connexorum. Disiunctivorum item duo modi. Prior, quando in immediatè oppositis, aut mediatis, quæ certum & definitum habent medium, positione vnius tollitur reliquum, vel reliqua. Vt numerus A vel est par vel impar: sed par, ergo non impar. Rursus, A vel majus est quàm B, vel minus vel æquale: sed æquale, ergo nec majus, nec minus. Atq; hujus primi disiunctivorum

modi

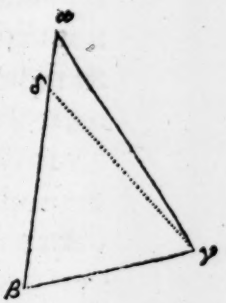
modi vſus eſt, quòd ſciam, infrequens apud Mathematicos. Secundus modus diſiunctivorum, quando ex deſtructione vnius immediatè oppoſitorum, aut duorum in ijs quæ certa habent & determinata media, ponitur reliquum. Oppoſita immediata, vt in contrarijs, par, impar, omniáq; contradicentia, æquale, inæquale; ſymmetrum, aſymmetrum; majus, non majus. Oppoſita definitum habentia medium, vt inter majus & minus, æquale. Hujus generis ſunt vltra α punctum, exempli cauſa, & citra; infra, ſupra; intra, extra. In quibus omnibus medium eſt ipſum α punctum. Exempla hujus ſecundi diſiunctivorum modi paſſim ſuppetunt: in contrarijs immediatis ad triceſimã nonam: Numerus γ vel impar eſt vel par: non impar, par ergo. In contradicentibus ad vltimam decimi: Diameter vel commenſurabilis eſt lateri, vel incommenſurabilis; non cõmenſurabilis propter abſurda inde conſequentia, incommenſurabilis ergo. In ijs quæ definitum habent medium, vt punctũ α cadit vel extra peripheriam β, vel intra, vel in ipſa peripheria: ſed nec extra, nec intra;

ergo in ipsa peripheria. Latus αβ vel majus est, vel minus, vel æquale lateri γδ: sed nec majus nec minus; ergo æquale: quo modo vtitur Archimedes in libello de circuli mensurâ. Atq; hi sunt quatuor modi syllogismorum hypotheticorum. Modum enim à Cicerone adjectum non numero, vt nec alterum à me additum. Quibus frustra quidam adjiciunt quintum, τὴν μετὰ συμπλοκῆς τῆς ἀποφάσεως, cum complexione negationis, ab Alexandro & veteribus repudiatum. Iam vt ad rem accedamus, dico demonstrationem omnem quæ ducit ad absurdum vel impossibile constare prosyllogismo tacito vel expresso ex secunda specie disiunctivorũ: hujusq; prosyllogismi τὴν πρόσληψιν, assumptionem, confirmari syllogismo apagogico ex secunda specie connexorum: Esse autem syllogismum apagogicum vnicum & simplicem, quoties syllogismus est in immediatè oppositis: duplicem verò, potestate saltem, quoties in mediatis: istorum denique syllogismorum τὸ τροπικὸν siue majorem propositionem, nimirum τὸ ψεῦδος, ipsam falsitatem, ostensiuè demonstrari: Quæ omnia quomodo

modo in hac demonſtratione ſextæ appareant, videamus, ſi placet.

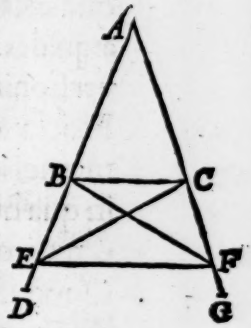
Si trianguli duo anguli æquales fuerint « inter ſe, & latera æqualibus angulis ſubtenſa « erunt inter ſe æqualia. In verbis propoſitio- « nis nulla eſt obſcuritas, nulla ambiguitas, e- oq; magis quia de Triangulo in numero ſingulari propoſuit, cum ſuperiùs in plurali propoſuiſſet.

« Sit triangulum α β γ æqualem « habens angulum α γ β angulo « α β γ, ἔκθεσις eſt Dein ſequitur διο- « ρισμὸς: dico latus α δ æquale eſſe « lateri α γ. Sequitur proſyllogiſ- mus ex ſecundo genere diſiunctivorum. Si α β α γ non ſunt æqualia, ergo inæqualia. Si inæqualia, alterum eſt majus altero: Eſto α β major quàm α γ. Dein κατασκευὴ, ſiue con- « ſtructio. Auferatur à majori α β minore α γ « æqualis β δ, & connectatur δ γ. Sequitur demonſtratio apagogica, cujus tota vis in eo ſita eſt: ſi α γ β δ æquales, erit pars æqualis toti· quod ſic ſyllogiſmo oſtenſiuo demonſtratur.



Quoniam in triangulis α β γ ∧ γ β, α γ æqualis eſt τῇ ∧ β per conſtructionem, & β γ communis, anguliq; ∧ β γ α γ β comprehenſi per hypotheſim æquales, ergo triangulum β ∧ γ æquale erit triangulo α β γ, hoc eſt ſuperficies ſuperficiei, per ſecundam partem quartæ, pars toti, quod eſt abſurdum. Non ſunt ergo inæquales α β α γ. Nam illud falſum eſt, ex quo per neceſſariam conſequentiam falſum ſequitur, cùm ex veris nil niſi verum: æquales igitur, quod fuit demõſtrandum. Vel immutatâ paulò conſtructione, & fortaſſe meliùs ſic: ab β α majori reſecetur τῇ α γ minori æqualis β ∧ per tertiam, & producatur γ α in directum per ſecundum poſtulatum. Et ad α per ſecundam fiat α ε æqualis τῇ ∧ α, & per primum poſtulatum connectatur ε β. In triangulis α β γ ε γ β latera α β γ ε per ſecundum axioma æqualia, & β γ commune, anguliq; comprehenſi α β γ ε γ β per hypotheſim æquales; ergo & triangula α β γ ε γ β, pars toti, quod eſt abſurdum. Videtis me aliquot verba prætermiſiſſe in Euclideâ demonſtratione,

ſtratione, vt ſunt illa; baſis ergo δγ baſi αβ æqualis: quia non erant neceſſaria ad conficiendam concluſionem. Sed illud de æqualitate baſium prius erat, quàm illud de æqualitate ſuperficierum. Reliquas partes concluſionis quartæ non attigit, contentus eouſq; citationem quartæ produxiſſe, quoad perventum eſſet ad illud, quod propoſitum ſuum concluderet. Quid vero ſi anguli ſub baſim fuerint æquales? Etiam ſic triangula concludentur æquicruria, quæ eſt converſa poſterioris partis præcedentis propoſitionis, quod ſic demonſtrauit ingenioſiſſimus Proclus. Sit Triangulum A B C, & producantur latera ad D & G, ſintq; anguli ſub baſi D B C G C B æquales; dico triangulum A B C eſſe æquicrure. Sumatur in linea A D punctum E, ipſiq; B E reſecetur æqualis C F per tertiam hujus, & connectantur E C B F. In triangulis B C F C B E duo latera F C, B E per conſtructionem æqualia, & B C commune: & anguli E B C F C B comprehenſi per ſuppoſitionem æquales.



Ergo per quartam baſes E C B F æquales, anguliq; C B F, B C E æquales, quia æqualibus lateribus ſubtenduntur. ſublatis igitur F B C E C B æqualibus ab E B C F C B per hypotheſim æqualibus, reſtant E B F F C E æquales. Iam in triangulis E B F F C E latera C F B E per conſtructionem æqualia, & B F C E per ante demonſtrata, & anguli comprehenſi F B E E C F æquales; ergo B E F C F E anguli æquales. Æquicrure igitur E A F triangulum, & A E A F per priorem partem hujus æquales. Quare per tertium axioma A B A C æquales. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Hanc autem converſionis partem ideò neglexiſſe Euclidem Proclo aſſentior, quod nulli ſit vſui in Geometricis demonſtrationibus ante 13^m hujus, in qua hoc idem pleniùs continetur: Quare omitti quidem meritò debuit, potuitque. Quod ſi quis fuerit ex ſtudioſis adoleſcentibus, qui in his tribus Theorematibus conſequentiam demonſtrationis non fuerit plenè aſſecutus; is, ſi placeat, adeat *D. Briggeſium* ſucceſſorem meum. Permagni enim intereſt hæc tria perfectè intelligere ad totius Geometriæ,

metriæ,adeoq; totius Mathematices cognitionem. De perfecta comprehenſione Euclidearum demonſtrationum loquor, non de meis ἐπεισοδίοις, digreſſionibus & parergis ſiue obſervationibus, aut aliorum interpretum,quibus non magno ſuo damno carere poterunt.

LECTVRA XIII.

Propoſitio 7ª

SI duæ rectæ lineæ duabus τὰ αὐτὰ ſ. ijſdem,&c.) Patimini me, Auditores,à magiſtro meo quod perraro & perinvitus facio, hoc loco diſſentire. Nego enim hæc propoſitionis verba ex proprietate Græcæ linguæ eum ſenſum inferre, quem voluit Euclides. Quid enim ſibi volunt, δύσι τὰ αὐτοῖς,duabus ejſdem? Et quidem Helleniſmus

niſmus & Græcæ linguæ vſus hanc interpretationem poſtulat omninò: Vt niſi hæc tam obſcura & perplexa per expoſitionem & determinationem, δι' ἐκθέσεως & διορισμοῦ, explanata fuiſſent, nemo ea intelligeret, quod eſt vitium in proponendo vel maximum. Sic ergo, me auctore, reſcribite. Si à duobus punctis in eâdem rectâ lineâ duæ rectæ (æquales, an inæquales nihil ad rem) ſurgant, erigantur, concurrentes ad idem punctum, atq; ita triangulum facientes: aliæ duæ rectæ ab ijſdem punctis æquales, quælibet ſuæ conterminæ, erigi non poſſunt, ad eaſdem partes concurrentes ad aliud atq; aliud punctum, atq; ita triangulum facientes. Habet hoc præſens Theorema illud peculiare & admodum rarum, præſertim in propoſitionibus ſcientificis. Per negationem enim, & non per affirmationem formari, ab hujuſmodi propoſitionibus, vt dixi, ſcientiam parientibus alienum eſt. Vt plurimùm enim tam Geometricorum quàm Arithmeticorum Theorematum propoſitiones affirmationes ſunt. Cauſa autem eſt, vt inquit Ariſtoteles, quod vniverſalis affirmativa ſcientijs maximè

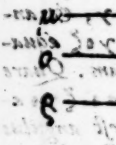
mè convenit, vt αὐτοπροσῳες, id est, magis ex se sufficiens, neq; indigens negatione. Vniversale autem negans affirmatione indiget ad sui probationem. Nam ex solis negativis neq; demonstratio fit, nec vllus omninò syllogismus. Atq; idcirco demonstrativæ scientiæ, vt plurimùm affirmativis, rariùs vtuntur negativis conclusionibus. Illud autem hoc loco novitijs observâsse non erit fortasse invtile, Præter quatuor vsitatos & vulgò notos argumentandi modos, Primum ex principijs; Secundum ex prædemonstratis; Tertium ex hypothesibus propositionis, vel positionibus, adversarij in demonstratione ab impossibili; Quartum ex structurâ sive constructione, fabricâ, ἐκ κατασκευῆς; Quintum mihi videri modum argumentandi, quarto quidem affinem, sed tamen, vt mihi videtur, diversum, locum habere tum in hac, tum in alijs plærisq; demonstrationibus Geometricis, *ex diagrammate*, hoc est, conspectu figuræ, ipsoq; ductu linearum, vt suo loco monebimus. Sed jam præambula demonstrationis, hoc est, ἔκθεσιν & διορισμὸν, expositionem & determinationem nostris verbis, quia ab Eu-

clide deſcivimus, explicemus. Expoſitio, ἔκθεσις, eſt: Sit recta linea α β, & ab α & β punctis excitentur duæ rectæ α γ β γ, vtcunq; æquales vel inæquales, coëuntes ad punctum γ, & triangulũ conſtituentes α β γ. Διορισμός, determinatio. Dico quod non eſt poſſibile, vt excitentur (ſurgant, erigantur) ab ijſdem punctis α & β duæ aliæ rectæ lineæ concurrentes (coëuntes) ad aliud & aliud punctum, quàm γ, & æquales quælibet ſuæ conterminæ, ad eaſdem partes α β rectæ lineæ. Excitentur enim, ſi poſſibile eſt, verſùs eaſdem partes duæ aliæ rectæ α δ β δ, quælibet æqualis ſuæ conterminæ, ſc. α δ recta æqualis rectæ α γ, & β δ recta rectæ β γ, coëuntes & triangulũ conſtituentes ad punctũ δ. Punctũ δ neceſſe eſt cadere vel extra Triangulum α γ β, vel intra, vel in vno laterum α γ β trianguli: cadat primò extra triangulum, vt in diagrammate Euclidis. Nam de duobus alijs caſibus poſteà videbimus. Κατασκευή, conſtru-

ſtructio, tribus verbis abſoluitur. Connectatur γ δ recta linea. Sequitur Demonſtratio, re eadem cum Euclideâ, ſed ordine paululum immutato. Angulus β δ γ major eſt angulo α δ γ. Sunt enim, vt totum & pars, vt ex diagrammate patet. Neq; enim ex vllo *alio quatuor argumentandi modorum prædictorum, hoc concludi poteſt. Rurſus quia per poſitionem adverſarij α γ α δ ſunt æquales, eſtq; baſis γ δ recta per conſtructionem; Iſoſceles ergo erit triangulum γ α δ, & angulus α δ γ per quintam hujus æqualis angulo α γ δ. Iam per axioma non ſcriptum, ſed à naturâ inditum & congenitum nobis, ſi duæ quantitates fuerint æquales (nam de angulis eadem ratio eſt) quarum vna dividatur in parteis, altera maneat indiviſa, quantitas indiviſa major eſt quâcunq; parte quantitatis diviſæ. Dividitur autem α γ δ angulus à rectâ γ β in duos angulos α γ β & β γ δ, vt ex diagrammate

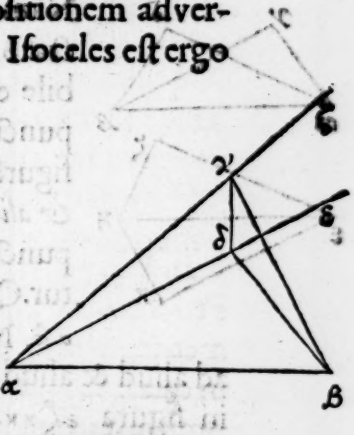
* *Argumenti hic diagrammate illuſtre exemplum eſt in figurâ decimæ ſextæ huius. Nam in triangulis β α ζ γ latera β α ζ γ per conſtructionem ſunt æqualia, itidemq; latera α ζ γ, & anguli verticales α β γ ζ æquales per decimam quintam. Quare per quartam anguli β α ζ γ æquales. Sed maior eſt angulus ζ γ δ angulo ζ γ ζ. Quo demum argumento? Nullo ſcil: alio argumento, quam ex diagrammate & dictis linearum. Neq; enim aliter lineæ cadere poſſunt. Et ſic fere per totum ſecundum librum.*

& ductu lineari apparet. Angulus itaq; α ∧ γ indiuiſus major eſt angulo β ∧ γ deſecta particula. Sed angulus β ∧ γ ſupra demonſtratus eſt major quam α ∧ γ. Ergo β ∧ γ multo major quàm β γ ∧. Nam majus maiore per axioma naturale eſt majus minore. Exempli cauſa ſi μ ν recta maior eſt quàm ο π; & ο π maior quàm ρ σ, ſequitur ex neceſſitate μ ν eſſe multo majorem quam ρ σ.

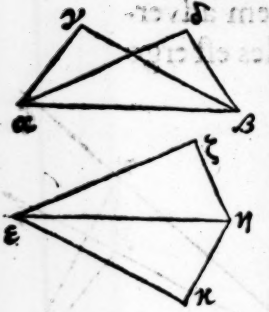


Neque id ſolùm, ſed & aliquid amplius. Reſecetur ex μ ν maiore μ τ æqualis rectæ minori ο π, & ex ο π maiore ο φ æqualis rectæ ρ σ minori: recta μ ν non ſolũ maior erit quàm ρ σ, ſed maior erit quantitate duarum rectarum deſectarum, ſcil. τ ν & φ π ſimul ſumptarum. Sic in propoſito ſchemate, angulus β ∧ γ non ſolũ maior erit angulo β γ ∧ (quod tamen ſufficit ad colligendam concluſionem) ſed angulus β ∧ γ maior eſt angulo β γ ∧, quantitate duorum angulorum ζ ∧ α & β γ α. Sed per poſitionem adverſarij β γ ∧ eſt triangulum Iſoceles. Angulos ita β ∧ γ β γ ∧ oportuit eſſe æquales (per quintam

huius) qui deprehensi sunt inæquales, quod est impossibile. Itaq; falsa est positio adversarij. Iam pro secundo casu, cadat punctum δ intra triangulum αγβ: & ducatur recta δγ, & producantur latera αγ, αδ vsque ad ζ, & ε. Angulus βδγ maior est angulo γδε, vt totum parte, sicut ex diagrammate patet. Et quia per positionem adversarii αγ αδ sunt æquales, Isoceles est ergo triangulum γαδ, & anguli ζγδ εδγ sub basim γδ per posteriorem partem quintæ æquales. Ergo εδγ indivisus maior erit δγζ particulâ defectâ. Sed βδγ demonstratus est maior γδε. Ergo βδγ multo maior erit quàm δγβ. Sed æquales esse oportuit, quia ad basin Isocelis trianguli δβγ, quod est impossibile. Ergo falsa erit positio adversarii. Tertius casus, cùm punctum δ cadit in latus βγ vel αγ, est ἀσύστατος, & contra hypotheses propositionis. Neq; enim possunt βδ & βγ esse æquales, pars & totum. Obseruent autem stu-



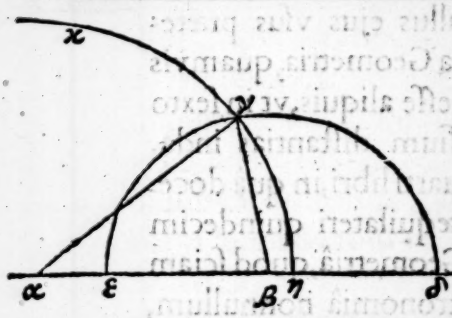
dioſi vallatam eſſe hanc propoſitionem, & ab omni cavillatione munitam quinq; conditionibus ſiue limitationibus: quibus ſervatis, & propoſitio vera eſt, & ſyllogiſmus indubitatus. Prima, *ſupra eâdem rectâ lineâ.* Nam ſupra duabus id fieri in procliui eſt. Secunda, *vt quælibet ſit æqualis ſuæ conterminæ.*



Nam ſi α γ æqualis ſumatur rectæ β δ & β γ τῇ α δ, bene poſſibile eſt coïre ad aliud & aliud punctum, vt in hac ad marginem figurâ. Tertia conditio, *Ad aliud & aliud punctum.* Nam ſi ad idem punctum, hoc eſt quod quæritur. Quarta, *ad eaſdem partes rectæ* α β. Nam ſi ex altera parte, coïre ad aliud & aliud punctum facilimum eſt, vt in figura ε ζ η κ. Quinta, *eoſdem terminos, fines, extrema habentes.* Poſſunt enim ab alijs punctis in α ζ quàm α & β duæ rectæ lineæ æquales rectis α γ β γ coïre etiam intra triangulum α γ β: ſed à terminis ijſdem non poſſunt. Atq; hæc de ſeptima propoſitione, quæ neq; στοιχεῖον eſt, elementum, & ex ſe generativum, neq; στοιχειῶδες, ſed planè lemma

ad

ad octavam. Nam nullus ejus vſus prætereà, quod ſciam, in tota Geometria, quamvis in Aſtronomia poteſt eſſe aliquis, vt in ſexto Almageſti ad Eclipſium diſtantias indagandas. Sic vltima quarti libri, in quâ docetur fabrica polygoni æquilateri quindecim angulorum, vſum in Geometriâ, quod ſciam nullum habet: in Aſtronomiâ nonnullum, ad repreſentandam maximam ſolis ab æquatore declinationem, ſiue diſtantiam polorum Zodiaci & Æquatoris: quæ 15ª pars eſt proximè maximi circuli, hoc eſt, viginti quatuor graduum ferè. Ptolemæo in 1° lib. Almageſti graduum trium & viginti, quinquaginta & vnius prim: & viginti ſec: differentia minore quàm novẽ minutorũ: quod in illa ætate Aſtronomiæ ferè rudi (pace veterum Heroum dictum eſto) mirum nemini videri debet. Eſt & alia demonſtratio hujus ſeptimæ, quam viſum eſt vobis proponere. Ductis rectis $\alpha\gamma$ $\beta\gamma$ concurrentibus in γ, dico impoſſibile eſſe ducere alias duas ab iiſdem punctis α & ζ, ſuis conterminis $\alpha\gamma$ & $\zeta\gamma$ æquales, & ex eâdem parte rectæ $\alpha\beta$, concurrentes in alio puncto quàm in γ. Centris enim

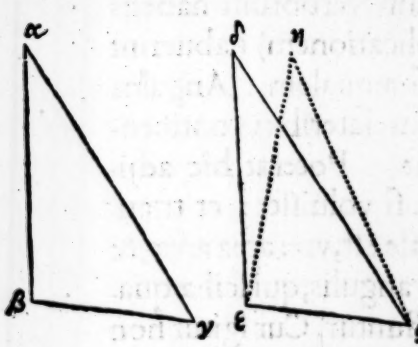


enim α & ζ intervallis αγ βγ describantur duæ peripheriæ xγν, δγε cõcurrentes in puncto γ. Necesse est igitur rectas omnes ductas à puncto α, & æquales rectæ αγ terminari in peripheria xγν, per 15^am. definit: itemq; omnes rectas ductas à puncto B, & æquales rectæ βγ terminari in peripheria δγε, per eandem 15^am definit: multum autem punctum est commune duarum illarum peripheriarum ex eadem parte αζ lineæ præter γ, vt ex diagrammate apparet: ergo ad γ punctum concurrant necesse est, non ad aliud & aliud punctum. Quod fuit demonstrandum.

Propositio. 8ª.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, alterum

terum alteri (Quorum verborum habetis ſuperiùs in quarta explicationem) habuerint autem & baſim baſi æqualem: Angulos quoq;, qui æqualibus lateribus continentur, æquales habebunt. Poterat hîc adjicere Euclides, & verè, ſi voluiſſet: et triangulum triangulo æquale eſt, viz: area areæ, & reliqui anguli reliquis angulis, qui ſcil: æqualibus lateribus ſubtenduntur. Cur igitur non adjecit? Ne actum ageret. Nam demonſtratâ angulorũ baſi ſubtenſorum æqualitate, reliqua tria ex quartâ perſpicuè ſequuntur: vt hæc tria hoc loco probare, nihil eſſet aliud quàm apertè nugari. Cur adjecit Euclides, & baſim baſi æqualem? Quia manentibus lateribus æqualibus, auctâ baſi augetur angulus & minutâ minuitur, vt ex viceſima quinta hujus lib. patet. Certum eſt igitur & tutum dicere, quod & baſis æqualis exiſtens & latera æqualia inferunt ex neceſſitate ipſius anguli æqualitatem. Sed jam ad Euclidis reliqua verba veniamus. Sint duo "Triangula α ζ γ ♪ ε ζ duo latera α β "α γ æqualia duobus lateribus ♪ ε ♪ ζ ha-



bentia, alterum " alteri, viz: α β æquale δ ε lateri (hic beneficio, vt dixi, ἐκθέσεως videtis clarè & distinctè explicari, quid sit alterum alteri) & α γ æquale δ ζ lateri, & basim β γ æqualem basi ε ζ. Sequitur διορισμὸς. Dico angulum quoq; β α γ angulo ε δ ζ æqualem esse. Iam demonstratio: Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ α β γ τριγώνου revocate in memoriam, quæ diximus ad quartam hujus de differentiâ τοῦ ἐφαρμοζομένου & τοῦ ἐφαρμοσαντος. Triangulum ἐφαρμοζόμενον non dici hoc loco & alibi de Triangulo perfectè congruente (nam hoc demonstrandum est, non à principio sumendum) sed de triangulo applicato, accommodato, admoto & superimposito alij triangulo, non assumpta illa congruentia, quæ vocabulo ἐφαρμογῆς & ἐφαρμόζειν notatur, & æqualitatem inducit. Commandinus hoc loco scopulum illum non vitans, vertit, congruente α β γ triangulo

gulo ipsi ∂ ε ζ triangulo: & noster interpres etiam hoc loco, *exactly agreeing*. Quem tamen errorem vitârunt Campanus, Clavius & alij, quotquot vel Græcam linguam non intellexerunt, vel codicem Græcum (quamvis perperam intellectum) non sunt secuti, sed potius nativum & genuinum sensum & tenorem syllogismi, quo vsus est hoc loco Elementator. Clavius sic: si triangulum α ζ γ cogitetur cadere super triangulum ∂ ε ζ; omninò rectè. Etsi non possum dissimulare (si liber non sit mendosus, quod suspicor) in sequentibus verbis, (οὐκ ἄρα ἐφαρμοζουσῆς τῆ β γ βάσεως ὅλη τῆ ε ζ βάσει) ἐφαρμοζουσῆς directè poni pro ἐφαρμοσάσης, vitio sine dubio librariorum. Nam supra de ijsdem lineis & eâdem re, ἐφαρμοσάσης τῆ β γ ὅλη τῆ ε ζ dixit: Neq; mos sit Euclidi & Mathematicis à receptâ semel formulâ dicendi postea discedere, aut in copiâ verborũ inaniter ludere. Sed pergamus. Triangulo enim α β γ applicato triangulo ∂ ε ζ, & puncto β posito super ε, & rectâ lineâ β γ super ε ζ, congruet & γ punctum super ζ, quod æqualis sit β γ τῇ ε ζ. Quomodo hoc sequitur? Per conversam o-

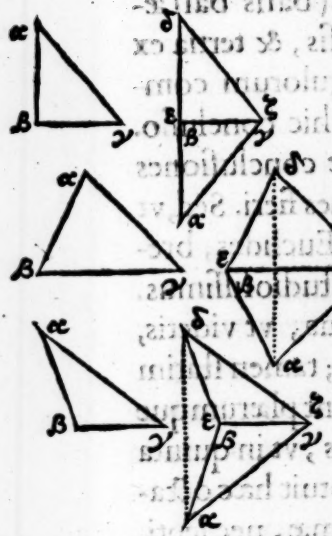
ctavi axiomatis sanè intellectam, & cum ijs limitationibus & restrictionibus, quas ad explicationem illius axiomatis, adhibuimus.

" Sequitur: Itaq; congruente, ἐφαρμοσάσης " propriè dictum, βγ basi super εζ basim (quia " scilicet ζ congruebat super ε & γ super " ζ) Congruent ergo & βα γα latera su- " per ε∧ ∧ζ lateribus. Si enim basi ζγ con- " gruente super basim εζ, βα αγ latera super " ε∧ ∧ζ non congruunt; ἀλλὰ παραλάξουσιν .i. " alium quemcunq; situm sive positionem " occupant, vt ε» »ζ, ita viz: quod ∧ non con- " gruat super α, sequetur contra proximè præ- " cedentem, si à duobus punctis &c. Sed fal- " sum est duas tales rectas erigi posse. Non er- " go congruente ζγ basi (ἐφαρμοζομένης, corri- " gite libros vestros, & scribite ἐφαρμοσάσης, vt " supra in eadem re) super εζ basim, non con- " gruent & βα αγ latera super ε∧ ∧ζ lateri- " bus. Congruent igitur. Quare & angulus " βαγ super angulo ε∧ζ congruet, & æqualis " ipsi erit per octavum axioma directè sump- " tum. Si ergo &c. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Est autem hæc octaua, conversa non simpliciter, sed ex parte tantùm quartæ huius. Nam

Nam ex tribus hypotheſibus quartæ, æqualitate duorum laterum ſigillatim ſumptorum, & anguli comprehenſi, & quatuor concluſionibus, nempe baſis ad baſim, & areæ ad aream, & duorum angulorum ad duos, duæ primæ hypotheſes ſunt etiam huic octavæ communes, ſcil: æqualitates laterum: & prima ex concluſionibus (baſis baſi æqualis) eſt hic tertia hypotheſis, & tertia ex hypotheſibus quartæ ſc: angulorum comprehenſorum æqualitas, eſt hic concluſio. Potuerunt etiam & tres aliæ concluſiones quartæ, hic etiam concluſiones fieri. Sed, vt dixi, non voluit actum agere Euclides, brevitatis, vt ceteri ferè veteres, ſtudioſiſſimus. Itaq; converſa eſt hæc octaua, vt videtis, quartæ aliqua ex parte. Neq; tamen ſtatim poſita poſt quartam, vt ſolent plærumque converſæ, præſertim ſimplices, vt in quinta & ſexta apparet, quia non potuit hæc octava demonſtrari ſine ope ſeptimæ, nec ſeptima ſine ope quintæ. Philo tamen Byzantius, vir elegantis ingenij, cujus eſt apud Eutocium in ſecundum Archimedis de ſphæra & cylindro Meſolabi non inſcita inventio,

hanc octavam demonſtravit ſine ope quidem ſeptimæ, ſed ſubſidio quintæ, elegantiſſimè ſanè in hunc modum, per triplicem tamen caſuum varietatem, quod elementari inſtitutioni minimè convenit, atq; ideò ab elementatore vel non cognita, vel neglecta. eſt autem huiuſmodi. Sint duo triangula



α ζ γ, δ ε ζ, habentia duo latera α ζ δ ε æqualia & α γ δ ζ ſimiliter æqualia, & baſin ζ γ baſi ε ζ æqualem: & ponatur ζ punctum ſuper ε & γ ſuper ζ. Congruent baſes ζ γ ε ζ, vt ſupra, ponaturque triangulum α ζ γ ex altera parte lineæ ε ζ in eodem quidem plano cum δ ε ζ, ſed adverſis verticibus. Et ducatur à δ ad α recta linea δ α. Linea δ ε vel in directum poſita erit lineæ ζ α ſiue ε α, vel non in directum. Si indirectum, linea α δ cadet ſuper duo latera δ ε ε α, faciet q; cum eis vnam lineam: vt in prima figurâ.

râ. Si non in directum, recta δα vel cadet intra duo triangula, vt in secunda figura, vel extra, vt in tertia. Nam vt pars rectæ αδ cadat intra Triangulum, pars extra, fieri non potest. Alioqui duæ rectæ lineæ claudent superficiem, contra decimum axioma. Iam in prima figurâ in æquicrure δζα, δζ, γα, æquales, ergo anguli ad basim ζδε βαγ erunt æquales per quintam semel sumptam. ὅπ. ἔδ. δεῖξ. in 2ª figura δε, βα æquales, ergo anguli εδα βαδ æquales per 5am. Itemq; δγ (sive δζ) & γα (sive ζα) æquales. Ergo anguli γδα γαδ æquales. Ergo per secundum axioma totales anguli εδγ εαγ æquales: quod fuit demonstrandum. In 3ª figurâ, αζ (vel αγ) æqualis ζδ (vel δγ) ergo anguli ζαδ (vel γαδ) & ζδα (id est, γδα) æquales. Rursus αε εδ æquales, ergo εαδ εδα anguli æquales. Demptis ergo εαδ εδα æqualibus à ζαδ ζδα æqualibus, restant ζδε, γαβ æquales per tertium axioma, quod fuit demonstrandum. Atq; hæc est demonstratio Philonis, non inscita certè, imò peringeniosa. Hi tres casus Philonis possunt in vnum reduci, si basim

maxi-

maximam, vel ſaltem qua nulla major, baſi maximæ applicueris. Ita enim perpetuò cadet recta cõnectens vertices intra triangulũ.

Exolui, per Dei gratiam, Domini Auditores, promiſſum, liberavi fidem meam, explicavi pro meo modulo definitiones, petitiones, communes ſententias & octo priores propoſitiones Elementorum Euclidis. Hic annis feſſus *cyclos artemque repono*. Succedent in hoc munus alij fortaſſe magis vegeto corpore, vivido ingenio. De nobis ſenibus veriſſimum eſt illud apud Herodotum, γηρήσκοντι τῷ σώματι συγγηρήσκουσι αἱ φρένες: ſeneſcente corpore vnà conſeneſcunt & animi vires; omninóq; ſtat ſententia nunquam poſt hac in æternùm hanc docendi cathedram conſcendere. Itaq; trado lampadem ſucceſſori meo doctiſſimo viro, qui vos ad intima Geometriæ myſteria perducet. In quibus præcipuè vobis commendo quintum librum, vbi doctrina proportionum inchoata eſt. Quem librum appellare non dubitavit Lucas de Burgo animam & vitam reliquorum omnium. Quod ſupereſt, Auditores mei, Valete & ſtudete.

FINIS.